

STRUMENTI E METODI  
PER  
LE SCIENZE SOCIALI



# I MODELLI DI EQUAZIONI STRUTTURALI

TEMI E PROSPETTIVE

A cura di  
Claudio Barbaranelli e Sonia Ingoglia

The logo for Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto (LED), consisting of the letters 'LED' in a stylized, cursive script.

— Edizioni Universitarie di Lettere Economia Diritto —

# INTRODUZIONE

Claudio Barbaranelli  
Sonia Ingolia

«Sapienza» Università di Roma  
Università degli Studi di Palermo

I modelli di equazioni strutturali (*Structural Equation Models*, SEM) costituiscono una delle tecniche più utilizzate per l'analisi dei dati nelle discipline psicologico-sociali. Storicamente essi nascono dall'integrazione di differenti tradizioni di ricerca tra loro relativamente indipendenti: quella psicometrica, quella econometrica e quella biometrica. Gli studiosi che hanno operato nel campo psicometrico hanno sviluppato e approfondito concetti come quelli di *variabili latenti* e *variabili misurate con errore* (Spearman, 1904). I ricercatori che hanno invece lavorato nell'ambito dell'econometria hanno esaminato le influenze *simultanee* di alcune variabili su altre variabili e i *percorsi* che da tali complesse influenze possono risultare, elaborando i cosiddetti *modelli di equazioni simultanee tra variabili osservate* (Schultz, 1938). Un'ulteriore linea di ricerca si è sviluppata nel campo della biometria, ad opera di Sewall Wright (1934), dove sono stati utilizzati modelli di equazioni simultanee, con variabili osservate, per analizzare particolari schemi di rappresentazione dei nessi di influenza tra le variabili e di stima dei parametri, noti come *path analysis*.

Queste tradizioni di ricerca sono rimaste sostanzialmente indipendenti fino agli anni '60 dello scorso secolo, quando metodologi delle scienze sociali, come Blalock (1961, 1963), Boudon (1965) e Duncan (1966) hanno cominciato a sottolineare i vantaggi derivanti dalla possibilità di combinare la semplicità di rappresentare nessi di influenza tra le variabili tramite i diagrammi tipici della *path analysis*, con il rigore derivante dallo specificare equazioni simultanee, che comprendessero sia variabili osservate sia variabili latenti.

Nei primi anni '70 i cosiddetti *modelli causali* rappresentavano un metodo ampiamente diffuso. Mancava però un modello matematico generale che rendesse possibile trattare in maniera semplice, all'interno di un'unica cornice di riferimento, insieme anche estremamente complessi di relazioni

tra variabili. Tale modello venne proposto indipendentemente da Karl G. Jöreskog (1973, 1977), James W. Keesling (1972) e David E. Wiley (1973), e definito appunto il modello di Jöreskog, Keesling e Wiley (o semplicemente *modello JKW*), comunemente conosciuto come *modello LISREL*, dal nome dell'omonimo programma che di esso rappresenta un'implementazione per calcolatore. Nel corso degli anni sono stati elaborati altri modelli matematici che svolgono la stessa funzione unificatrice rappresentata dal *modello JKW*, e che sono alla base di alcuni *software* statistici ormai diffusi, come EQS ed Mplus.

Lo sviluppo e la disponibilità di programmi per computer che permettono di tradurre in un linguaggio non matematico le complesse operazioni matematiche connesse alla risoluzione simultanea di sistemi di equazioni lineari con variabili latenti ha poi facilitato enormemente la diffusione di questa tecnica. LISREL cronologicamente rappresenta il primo programma interamente dedicato ai SEM e spesso nell'uso corrente viene identificato con la tecnica stessa che implementa (si parla sovente di *modelli LISREL*). EQS e più recentemente Mplus sono programmi sviluppati successivamente che rappresentano alternative al loro precursore.

Sono numerosi gli articoli che ogni anno vengono pubblicati sulle principali riviste di psicologia, di sociologia, di marketing, e che sono dedicati a particolari aspetti di questa tecnica di analisi statistica, o nei quali il processo di analisi dei dati viene affrontato facendo ricorso ai SEM. Dal 1996, inoltre, esiste una rivista, *Structural Equation Modeling*, interamente dedicata ai SEM. Sono numerosi anche i testi monografici dedicati alla discussione degli aspetti teorici e applicativi di questa tecnica (l'Appendice presenta una discussione di alcuni dei principali). Inoltre, sul web è attivo un gruppo di discussione che rappresenta ormai un punto di riferimento essenziale per i ricercatori, gli studenti e gli utenti dei SEM (SEMNET, <http://www2.gsu.edu/~mkteer/semnet.html>).

Questo volume testimonia il crescente interesse per l'utilizzo dei SEM anche nel nostro paese. Esso nasce da una occasione specifica, la giornata di studio organizzata il 26 ottobre del 2009 dal Dipartimento di Psicologia dell'Università di Palermo e dedicata interamente ai SEM. Ospite d'onore della giornata di studio è stato Peter M. Bentler. È difficile parlare dei SEM senza parlare di Bentler: oltre a essere considerato unanimemente uno dei «padri fondatori» dei SEM (almeno quanto lo è Jöreskog) Bentler ha fornito (e continua a fornire) contributi fondamentali allo studio e allo sviluppo dei SEM. Diversi dei ricercatori che hanno contribuito a questo volume hanno avuto l'onore e il privilegio di essere suoi alunni e di condividere con lui interessi e questioni di ricerca, trovando in lui sempre un'enorme disponibilità e una profonda umanità. Siamo dunque orgogliosi di ospitare

in questo testo un contributo di Peter ed enormemente grati a lui per il regalo che ha fatto a tutti i lettori italiani.

Questo volume ricalca in buona sostanza le tematiche affrontate nella giornata del 26 ottobre 2009 ma ne amplia gli orizzonti prendendo in esame anche temi che non hanno potuto trovare spazio in quel contesto. Esso si articola in due parti. La prima tratta alcuni dei temi di base cruciali nello studio e nel dibattito sui SEM. La seconda affronta alcune fondamentali applicazioni avanzate. Il testo è corredato da materiale online relativo agli esempi applicativi discussi nei diversi capitoli.

Il primo capitolo, scritto da Peter Bentler, tratta gli aspetti storici che hanno contraddistinto lo sviluppo dei SEM e propone in modo innovativo la loro applicazione a modelli psicometrici classici come quello di Guttman. Il secondo capitolo, scritto da Sonia Ingoglia, prende in esame il tema dei modelli di misurazione dando spazio alle concettualizzazioni nei SEM di tematiche classiche come quelle dell'attendibilità e dell'analisi fattoriale. Il terzo capitolo, scritto da Palmira Faraci e Pasquale Musso, tratta l'importante tema della valutazione dei SEM e offre una rassegna dei principali indici di bontà dell'adattamento utilizzati nella letteratura. Il quarto capitolo, scritto da Claudio Barbaranelli, affronta il tema dei modelli su gruppi multipli approfondendo gli aspetti legati allo studio dell'invarianza di misura e dell'invarianza fattoriale. Il quinto capitolo, scritto da Nino Miceli, prende in esame la mediazione e la moderazione da un punto di vista delle alternative analitiche offerte dai SEM rispetto a più classici metodi spesso ancora utilizzati nelle ricerche psicologico-sociali. Il sesto capitolo, scritto da Roberta Fida e Michele Vecchione, affronta il tema dei SEM applicati all'analisi dei dati longitudinali, dando spazio sia ai tradizionali modelli autoregressivi, che ai più moderni modelli di curve di crescita. Il settimo capitolo, scritto da Michele Vecchione, Elena Natali e Roberta Fida, tratta gli sviluppi più recenti dei SEM per l'analisi di dati categoriali e non normali. L'ottavo capitolo, scritto da Massimiliano Pastore, prende in esame il tema dell'utilizzo delle tecniche di simulazione nella ricerca sui SEM. Il libro è chiuso da un'Appendice, scritta da Claudio Barbaranelli, relativa alla parametrizzazione dei SEM tramite il *modello JKW*. Ci auguriamo che i ricercatori e gli studenti italiani interessati all'analisi multivariata dei dati e in particolare alle applicazioni dei SEM possano trovare nelle prossime pagine spunti di riflessione ed elementi di fattiva discussione per i propri studi.

Settembre 2013

# PREFAZIONE

*Alida Lo Coco*

Università degli Studi Palermo

Quando nell'ottobre del 2009 Peter Bentler, uno dei più prolifici ed eterogenei psicologi della sua generazione, giunse a Palermo per un ciclo di lezioni presso il Dottorato di Ricerca in Pubbliche Relazioni dell'Università e la partecipazione alla giornata di studi su *Structural Equation Modeling* (SEM), una delle prime riflessioni allora fatte riguardò il tipo di ricaduta che quell'iniziativa avrebbe avuto in Italia nell'immediato futuro.

A circa quattro anni di distanza, la pubblicazione di questo volume conferma la validità del progetto di dare un impulso alla ricerca psicologica italiana nella direzione dei più recenti approcci all'analisi dei dati in campo sociale.

A livello internazionale, infatti, e soprattutto nel mondo anglosassone, i SEM sono ormai diventati da anni diffusamente popolari; ne sono esempi il gran numero di lavori pubblicati sui *journals* psicologici, la concentrazione di articoli su riviste metodologiche che trattano l'argomento e di cui i primi fruitori sembrano essere gli psicologi, la disponibilità di diversi *workshop* e corsi brevi per il loro apprendimento, la divulgazione di un giornale appositamente dedicato (*Structural Equation Modeling*) e la stampa di una varietà di libri che introducono il lettore alle questioni di base o si focalizzano su aspetti più complessi. Nel nostro paese, invece, l'interesse su questo tema è stato e continua ad essere abbastanza sommerso così che, a tutt'oggi, sembra sussistere un certo *gap* da un punto di vista tecnico-analitico (ad eccezione di un certo lodevole gruppo di pochi studiosi).

Uno dei meriti del testo è proprio il tentativo di ridurre questa distanza, cercando di guadagnare terreno sia da un punto di vista della divulgazione dei concetti cruciali nel dibattito sui SEM sia nell'ottica dell'apprendimento di alcune fondamentali applicazioni avanzate. Altro pregio è quello di essere un importante strumento in mano agli scienziati sociali per la definizione di una bilanciata percezione dei punti di forza e dei limiti

della tecnica SEM. Ancora, fungere da utile manuale che può trovare facile impiego tra i ricercatori e gli studenti delle nostre università interessati all'analisi multivariata dei dati.

Certo, la strada verso lo sviluppo di un adeguato e propositivo dibattito «italiano» sui SEM è ancora lunga e molto resta da fare. Solo a titolo di esempio, sarebbe utile la progettazione di lavori capaci di: (a) confrontare in maniera approfondita i diversi tipi di SEM come pure i più diffusi software per la loro analisi (da LISREL a EQS, da Mplus a AMOS), (b) focalizzare lo studio sulla varietà di disegni e sulla tipologia dei contenuti di ricerca a cui i SEM possono essere applicati produttivamente e (c) rendere edotti i più sui problemi di ordine metodologico e teorico generati dall'uso improprio di questo potente strumento.

La speranza è, pertanto, che lo sforzo dei curatori e degli autori nella stesura del libro possa rappresentare uno stimolante viatico verso l'ampliamento della discussione sui SEM, foriera di nuovi e sempre più innovativi scritti.

Agli stessi curatori e autori va il mio personale ringraziamento e credo quello di tutta la comunità degli psicologi e degli scienziati sociali italiani. È facile notare che fra gli autori è presente lo stesso Peter Bentler che, anche da lontano, ha continuato a contribuire a quel disegno intrapreso con la giornata di studi. D'altronde, quasi tutti gli estensori dei capitoli, a partire dai curatori, erano presenti in quella giornata, che, probabilmente, ha segnato la nascita di una proficua collaborazione destinata a protrarsi nel tempo.

Palermo, 03/09/2013

1.

# CONCETTI DI BASE E AVANZAMENTI NELL'AMBITO DEI MODELLI DI EQUAZIONI STRUTTURALI \*

Un'applicazione allo studio degli effetti del fumo  
sul cancro e allo scalogramma di Guttman

*Peter M. Bentler*

University of California, Los Angeles

Traduzione di

*Pasquale Musso - Sonia Ingoglia*

Università degli Studi di Palermo

doi: 10.7359/649-2013-bent

SOMMARIO: 1. Introduzione – 2. Concetti di base dei SEM – 2.1. Modello di regressione – 2.2. Più di una equazione – 2.3. Altri tipi di equazioni – 2.4. Equazioni non standard – 2.5. Tracciamento dei percorsi (*path tracing*) e algebra matriciale – 2.6. Le matrici del modello e il loro uso – 3. Gli effetti del fumo sulla salute – 4. Lo scalogramma di Guttman con i SEM: l'*Absolute Simplex Theory* – 4.1. Modelli strutturali alternativi – 5. Alcuni sviluppi recenti sui problemi della modellizzazione – 5.1. Modellizzazione con i *parcel* – 5.2. Modellizzazione esplorativa – 5.3. Diagnostica dell'adattamento – 5.4. Errore di specificazione del modello – 5.5. Confronto di modelli – 5.6. Metodi robusti rispetto ai casi e alla distribuzione – 5.7. Dati mancanti – 6. Alcuni sviluppi recenti sui modelli strutturali – 6.1. Strutture di correlazione – 6.2. Mediazione – 6.3. Misurazione formativa – 6.4. Minimi quadrati parziali – 6.5. Analisi fattoriale confermativa – 6.6. Modelli di attendibilità – 6.7. Modelli di curve di crescita – 6.8. Modelli non lineari – 6.9. *Mixture Model* – 6.10. *Multilevel Model* – 7. Riferimenti bibliografici.

---

\* Questo studio è stato sostenuto dai *grant* DA00017 e DA01070 dell'U.S. *National Institute on Drug Abuse* a favore di Bentler, che riconosce un interesse finanziario verso EQS e il suo distributore, la *Multivariate Software*. L'indirizzo per la corrispondenza è bentler@ucla.edu.

## 1. INTRODUZIONE

Fin dalla loro nascita, ormai più di 30 anni fa, i modelli di equazioni strutturali (*Structural Equation Model*, SEM) si sono diffusi in tutti i campi delle scienze sociali e comportamentali, come in molti altri settori (per es. Hershberger, 2003; Nelson, Aylward & Steele, 2008; Sanchez, Budtz-Jorgensen, Ryan & Hu, 2005; Shah & Goldstein, 2006; Tomarken & Waller, 2005; Williams, Vandenberg & Edwards, 2009). Tenuto conto di ciò, vale senz'altro la pena tentare di comprenderne la metodologia, ma da un punto di vista didattico è un'impresa piuttosto impegnativa scrivere un'introduzione breve. Il numero di pubblicazioni attualmente esistenti è talmente ampio – sia per quanto riguarda le applicazioni empiriche che per quanto concerne la teoria matematica e statistica che sta alla base della metodologia – che qualunque capitolo deve essere altamente selettivo. Il presente capitolo si limita a introdurre i concetti di base sottostanti i SEM, a descriverne due recenti applicazioni e a fornire una panoramica su alcuni argomenti specifici – legati soprattutto ai temi della modellizzazione e delle strutture di un modello alternativo – che serva come guida per la consultazione della letteratura. Le recenti applicazioni qui presentate descrivono le conseguenze del fumo sulla salute e un nuovo approccio al trattamento di dati binari associati al metodo dello scalogramma di Guttman (1944, 1950). Per una panoramica più esauriente sugli aspetti concettuali e applicativi, si vedano Bollen, Bauer, Christ & Edwards (2010); Byrne (2006); Grace (2006); Kline (2010); Mulaik (2009); Teo & Khine (2009). Per una panoramica statistica, si vedano Lee (2007); Hayashi, Bentler & Yuan (2008); Yuan & Bentler (2007a, 2007b).

## 2. CONCETTI DI BASE DEI SEM

I passi principali nei SEM comprendono la specificazione del modello, la stima dei parametri, la valutazione del modello e dei parametri e la modificazione del modello. Questa sequenza può essere ripetuta molte volte fino a quando non si trovi un modello considerato accettabile. La presente introduzione si concentra principalmente sulla fase della specificazione così da aiutare un principiante a comprendere le idee di base di questa tecnica. Le altre fasi, così come le questioni a esse collegate, sono descritte in altri capitoli del volume.

Ci sono molti modi di pensare ai SEM. L'approccio di Bentler-Weeks (1980) è il più facile da comprendere. Si basa su una semplice estensione dei concetti della regressione alle equazioni del tipo della regressione



multipla. L'approccio alternativo più ampiamente conosciuto è il punto di vista di LISREL basato sul modello di Jöreskog-Keesling-Wiley (Jöreskog & Sörbom, 1997).

Accanto a questi approcci principali, ci sono molte estensioni specializzate e avanzate di modellizzazione e stima che sono state sviluppate per trattare una varietà di strutture di dati complessi (vd. per es. Bartholomew, Knott & Moustaki, 2011; Skrondal & Rabe-Hesketh, 2011). Dal momento che, per esempio, la definizione del modello LISREL richiede di specificare il ruolo di 13 matrici e vettori indicati mediante lettere dell'alfabeto greco, questi approcci addizionali sono troppo complessi e, pertanto, oltre gli scopi di questo capitolo. Essi vengono affrontati in parte nell'Appendice di questo volume.

## 2.1. Modello di regressione

È ben nota l'equazione di regressione con il criterio  $y$ , i predittori  $x_i$  e il residuo  $e$

$$y = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_p x_p + e \quad (1)$$

dove si assume che le  $x_i$  non siano correlate con le  $e$ . Le  $x_i$  sono usualmente chiamate variabili indipendenti, il cui ruolo nel modello è quello di aiutare a spiegare la variazione nella variabile dipendente  $y$ . L'approccio di Bentler-Weeks effettua una leggera modifica nella notazione e considera sia le  $x_i$  sia la variabile d'errore  $e$  come variabili «indipendenti», intendendo con ciò che esse non si trovano sul lato sinistro (quello della variabile dipendente) dell'equazione. Ciò significa che ogni variabile che non si trova mai sul lato sinistro di un'equazione è da intendersi come una variabile indipendente. Chiaramente i parametri del modello sono i coefficienti  $\beta_i$ , ma il modello Bentler-Weeks va oltre, sostenendo che la varianza e la covarianza delle variabili indipendenti sono anch'esse parametri da stimare. Nella regressione, la matrice di covarianza delle  $x_i$  solitamente si considera nota e fissa; ciò nella pratica è irrealistico.

Supponiamo di voler applicare il modello della (1) a quattro variabili V1-V4 che potremmo avere in un file di dati. Allora, in modo equivalente alla (1), potremmo scrivere

$$V4 = \beta_1 V1 + \beta_2 V2 + \beta_3 V3 + E4 \quad (2)$$

dove ora E4 indica la variabile residuo  $e$ . Una pratica importante nei SEM consiste nel rappresentare le equazioni attraverso un diagramma. Un *path diagram* per la (2) è riportato nella Fig. 1, che rappresenta (ma senza etichettare) ogni  $\beta_i$  come una freccia unidirezionale ( $\rightarrow$ ).

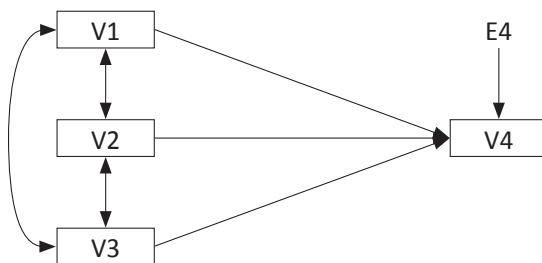


Fig. 1. – Path diagram per l'equazione di regressione.

La direzione indica che le variabili indipendenti (incluso il termine d'errore) influenzano la variabile dipendente. Su V4 puntano 4 frecce unidirezionali poiché ci sono 4 termini sul lato destro della (2). Il diagramma è più informativo dell'equazione (2) perché mostra anche le correlazioni o covarianze fra i tre predittori, rappresentate mediante frecce bidirezionali ( $\leftrightarrow$ ), e chiarisce, con l'assenza di qualsiasi freccia bidirezionale collegata a E4, che il residuo non è correlato con i predittori. La Fig. 1 non mostra le varianze di V1-V3; talvolta una varianza è rappresentata mediante una freccia bidirezionale che punta da una variabile a se stessa.

La Fig. 1 è un modo per rappresentare questo modello nel programma EQS (Bentler, 2006, 2009; Mair, Wu & Bentler, 2010). L'equazione (2) è implementata come  $V4 = *V1 + *V2 + *V3 + E4$ , dove ora \* rappresenta un parametro libero. EQS richiede anche la specificazione delle varianze e covarianze delle variabili indipendenti, che sono per l'appunto designazioni a «doppia etichetta» poiché implicano una connessione tra due variabili, e una specificazione che indichi se sono parametri liberi da stimare oppure parametri settati a un valore fisso. L'uso del simbolo \* consente di definire un parametro come libero. Le seguenti specificazioni  $V1, V2 = *$ ,  $V1, V3 = *$ ,  $V2, V3 = *$  definiscono le covarianze tra le variabili V1, V2 e V3 come parametri liberi, mentre la specificazione  $V1, V1 = *$  setta la varianza di V1 come un parametro libero. Va notato che, poiché E4 non è correlato con i predittori,  $V1, E4 = 0$  (non correlato); ma questo è implicito e tale formulazione non è necessaria.



2.

# L'ANALISI FATTORIALE CONFERMATIVA E LE SUE APPLICAZIONI AI PROBLEMI DELLA MISURAZIONE

*Sonia Ingoglia*

Università degli Studi di Palermo

doi: 10.7359/649-2013-ingo

SOMMARIO: 1. Introduzione – 2. Natura concettuale delle variabili latenti – 3. I modelli di analisi fattoriale confermativa – 3.1. Specificazione del modello – 3.1.1. Il modello di Bentler e Weeks – 3.2. Interpretazione delle stime dei parametri – 4. Applicazione dei modelli di analisi fattoriale confermativa ai problemi della misurazione – 4.1. La validazione di una scala – 4.1.1. Lo studio della dimensionalità – 4.1.2. Lo studio della validità e dell'attendibilità – 4.1.3. Test statistici addizionali – 4.2. Il raffinamento di una scala – 5. Tipi «speciali» di modelli di analisi fattoriale confermativa – 5.1. I modelli multitratto-multimetodo – 5.2. I modelli gerarchici con fattori di ordine superiore – 5.3. I modelli *bi-factor* con fattore generale e fattori specifici – 5.4. Confronto tra modelli gerarchici e *bi-factor* – 5.5. I modelli formativi con indicatori causa – 6. Conclusioni – 7. Riferimenti bibliografici.

## 1. INTRODUZIONE

Il presente capitolo è dedicato all'analisi fattoriale confermativa (*Confirmatory Factor Analysis*, CFA) e alle applicazioni che essa può trovare ai problemi legati alla misurazione di costrutti teorici. Accanto alla funzione che questa tecnica svolge come fase preparatoria nella costruzione di modelli di equazioni strutturali nella forma completa con variabili latenti, la CFA può essere, infatti, molto utile nella valutazione delle caratteristiche psicometriche di molti strumenti usati nell'ambito delle scienze sociali e comportamentali.

La misurazione è un tema focale nell'ambito dei SEM; insieme alla componente strutturale, è la dimensione centrale attorno a cui questa fami-

glia di tecniche si articola, e parte delle origini dei SEM è proprio legata alla tecnica dell'analisi fattoriale. Come è noto, all'inizio del XX secolo, Spearman (1904) sviluppa la tecnica dell'analisi fattoriale esplorativa (*Exploratory Factor Analysis*, EFA), affinata da Thurstone (1947) alla fine della seconda guerra mondiale. Tra la fine degli anni '60 e gli inizi degli anni '70, Jöreskog (1967, 1969) sviluppa la CFA. Nei primi anni '70, l'approccio della misurazione (ovvero l'analisi fattoriale) viene integrato con quello strutturale (ovvero la *path analysis*) nel lavoro di Jöreskog (1973), Keesling (1972) e Wiley (1973) in un *framework* definito da Bentler (1980) il modello JKW. Per un approfondimento sullo sviluppo storico dei SEM, si veda Bentler (1980).

La caratteristica preminente che qualifica i modelli di CFA rispetto ad altri modelli è la possibilità di specificare accanto alle *variabili osservate*, direttamente rilevate dal ricercatore, le cosiddette *variabili latenti*, che invece non sono misurate, ma solo inferite indirettamente sulla base delle intercorrelazioni tra gli indicatori; insieme, variabili osservate e variabili latenti, definiscono ciò che viene chiamato *modello di misura*. La CFA si basa sulla premessa secondo cui le variabili osservate sono indicatori imperfetti di certi costrutti latenti, a essi sottostanti. Se il ricercatore ha impiegato più indicatori per misurare un particolare costrutto latente, questa tecnica consente di creare in modo prespecificato (ovvero sulla base delle indicazioni provenienti da una particolare teoria) dei cluster di queste variabili per valutare in che modo un certo set di dati «conferma» ciò che, dal punto di vista teorico, si ritiene che sia la struttura sottostante. Questa tecnica richiede, pertanto, al ricercatore di ipotizzare una struttura latente e di valutare se il modello specificato a priori abbia o meno un buon adattamento ai dati osservati. Ciò rende la CFA un *framework* particolarmente adatto per affrontare alcuni dei problemi tradizionali associati alla valutazione delle caratteristiche di una misurazione (Bollen, 1989). Il presente capitolo è dedicato in maniera specifica a questi temi.

Prima di continuare, è opportuno fare alcune precisazioni su cosa il lettore troverà in questo capitolo e cosa invece, per ovvi motivi di spazio, non vi potrà trovare: a questo riguardo, saranno di volta in volta forniti gli opportuni riferimenti bibliografici per un approfondimento di alcuni temi essenziali. In primo luogo, va sottolineato che i modelli di CFA possono avere una molteplicità di applicazioni che vanno ben oltre le questioni legate alla misurazione in senso stretto: un esempio è rappresentato dai *Latent Growth Curve Model*, modelli della curva di crescita latente (McArdle & Epstein, 1987; Meredith & Tisak, 1990), che verranno trattati più avanti nel presente volume, o dal *Social Relations Model*, modello delle relazioni sociali, sviluppato da Kenny per studiare l'effetto di vari fattori che influenzano le relazioni sociali (Kenny, 1981; Kenny & La Voie, 1982, 1984). In

questo contesto, si è preferito focalizzare l'attenzione esclusivamente sul ruolo che i modelli di CFA possono avere nella valutazione di un processo di misurazione. In secondo luogo, il focus è posto più sulle possibilità applicative della tecnica nell'ambito della misurazione piuttosto che sulla tecnica in sé e sulle caratteristiche che la qualificano. Ciò significa che il lettore non troverà indicazioni circa il processo di specificazione, stima, valutazione e rispecificazione di un modello di CFA. A questo riguardo si rimanda al volume classico di Bollen (1989), ai manuali di Byrne (1998), Kline (2010), Schumacker e Lomax (2004); per un approfondimento sui recenti sviluppi dei SEM si veda, per esempio, Montfort, Oud & Satorra (2004); per un approfondimento sulla CFA si veda, per esempio, Brown (2006).

Il presente capitolo è articolato in vari paragrafi. Nel primo, viene illustrata la natura concettuale delle variabili latenti. Nel secondo paragrafo, l'attenzione è posta su un modello standard di CFA e su alcuni aspetti essenziali che lo caratterizzano. Nel paragrafo successivo, vengono presentati alcuni *setting* tipici di applicazione ai problemi associati alla misurazione nell'ambito delle scienze sociali e comportamentali. Infine, nell'ultimo paragrafo, vengono presentati alcuni tipi «speciali» di modelli di CFA: i modelli multitratto-multimetodo, i modelli *bi-factor* con fattore generale e fattori specifici, quelli gerarchici con fattori di ordine superiore e i modelli formativi con indicatori causa.

## 2. NATURA CONCETTUALE DELLE VARIABILI LATENTI

Come è stato sopra evidenziato, l'elemento principale che caratterizza i modelli di CFA, rispetto, per esempio, ai modelli di *path analysis*, è la possibilità di specificare, accanto alle variabili osservate o indicatori, direttamente misurate dal ricercatore, delle variabili latenti o fattori, che invece non sono rilevate, ma solo inferite in modo indiretto sulla base delle intercorrelazioni osservate tra gli indicatori. La differenza fondamentale tra le due classi di variabili risiede nel fatto che mentre gli indicatori contengono un errore di misurazione, i fattori ne sono liberi.

Nell'ambito dei SEM, si possono distinguere diversi tipi di variabili latenti, ognuno dei quali riflette assunzioni differenti circa la relazione che li lega alle variabili osservate. Occorre a questo riguardo fare una precisazione circa il significato che viene generalmente attribuito alle variabili latenti nell'ambito della psicologia e delle scienze sociali. Come sottolinea Bollen (2002), allo stato attuale non esiste alcun accordo circa il significato da attribuire loro. L'autore ne propone quattro diverse definizioni formali:

(a) indipendenza locale, (b) valore atteso, (c) funzione non deterministica delle variabili osservate, (d) realizzazione campionaria.

Mediante le variabili latenti si può rappresentare un ampio *range* di fenomeni, tra i quali costrutti teorici relativi alle caratteristiche delle persone (per esempio, l'ansia, il processamento fonologico o il ragionamento verbale) o di unità di analisi più elevate (per esempio, le aree geografiche), misure (per esempio, gli effetti di un metodo autovalutativo *vs.* un metodo proiettivo), fattori di crescita sottostanti un processo di sviluppo che si realizza in un certo periodo di tempo, o ancora gli effetti di diversi fattori su una relazione sociale. In questa sede, come sopra accennato, l'attenzione sarà centrata esclusivamente (fatta eccezione per i modelli multitratto-multimetodo) sulle variabili latenti impiegate per rappresentare costrutti teorici che non possono essere direttamente misurati (MacCallum & Austin, 2000).

Come sottolinea Bollen (1989), la misurazione è il processo attraverso il quale un costrutto teorico è messo in relazione a una o più variabili latenti, a loro volta associate alle variabili osservate. Per rappresentare un particolare costrutto possono essere necessarie più variabili latenti. Un processo di misurazione ha inizio con l'individuazione di un costrutto; i quattro passi successivi sono: (a) la specificazione del significato da attribuire al concetto, che si realizza mediante la *definizione teorica*; (b) l'individuazione delle dimensioni in cui esso si articola e delle variabili latenti necessarie per darne una adeguata rappresentazione; (c) lo sviluppo delle misure, ovvero la formulazione di una *definizione operativa* del concetto che descriva nel modo più dettagliato possibile le procedure da seguire per formare le misure della variabile latente che rappresenta il concetto; (d) la specificazione della relazione che intercorre tra le misure e le variabili latenti, ovvero la definizione di un *modello di misura* inteso come un modello strutturale che collega le variabili latenti a una o più variabili osservate. La variabile latente si configura in tal modo come la rappresentazione formale di un concetto. Solitamente è necessario avere molteplici indicatori capaci di rendere conto in modo più adeguato della complessità di un costrutto. Perché si possa affermare che un set di indicatori valuti un particolare costrutto, i dati dovrebbero essere coerenti con determinate previsioni; per esempio, gli indicatori che si suppone misurino il medesimo concetto teorico dovrebbero essere almeno moderatamente correlati tra loro, mentre quelli che si suppone valutino costrutti differenti non dovrebbero essere correlati in modo eccessivamente elevato. Se i dati non sono consistenti con queste predizioni, allora la definizione operativa che il ricercatore ha dato del costrutto viene messa in discussione.

Una volta data la definizione operativa del costrutto, il ricercatore deve creare da sé le misure, oppure selezionarle da strumenti già esistenti. Qualunque sia la scelta fatta, la scala impiegata per rilevare il costrutto di inte-

resse dovrebbe essere quanto più possibile libera dagli effetti di distorsione prodotti dall'errore di misura (accidentale e sistematico), essere cioè attendibile e valida. Nel § 4.1.2, verrà approfondito il modo in cui è possibile inquadrare i problemi legati alla valutazione dell'attendibilità e della validità nel contesto della CFA, ovvero secondo una strategia di analisi basata sulla specificazione di modelli di misura con variabili latenti piuttosto che su correlazioni tra variabili osservate.

Per un approfondimento sul concetto di variabile latente si vedano tra gli altri Bollen (2002); Borsboom, Mellenbergh & van Heerden (2003). Per un approfondimento sui temi della misurazione, della validità e dell'attendibilità si rimanda a Barbaranelli & Natali (2005); Boncori (2006); Borsboom, Mellenbergh & van Heerden (2004); Nunnally & Bernstein (1994).



3.

## LA VALUTAZIONE DEI MODELLI DI EQUAZIONI STRUTTURALI

*Palmira Faraci*  
*Pasquale Musso*

Università degli Studi di Enna «Kore»  
Università degli Studi di Palermo

doi: 10.7359/649-2013-fara

SOMMARIO: 1. Introduzione – 2. La valutazione dei modelli di equazioni strutturali – 2.1. L’adattamento statistico – 2.2. L’adattamento pragmatico – 2.2.1. Indici di proporzione della varianza spiegata – 2.2.2. Indici comparativi – 2.2.3. Indici di parsimonia – 2.2.4. Indici basati sui residui – 2.2.5. Indice di approssimazione – 2.3. La valutazione dell’adattamento generale – 2.4. L’analisi dei residui – 3. La valutazione dei modelli per dati non normali – 4. Dalla valutazione alla modifica del modello – 5. Conclusioni – 6. Riferimenti bibliografici.

### 1. INTRODUZIONE

I modelli di equazioni strutturali (*Structural Equation Modeling*, SEM) sono, in termini generali, una tecnica di analisi statistica multivariata che permette di verificare ipotesi circa l’influenza di un insieme di variabili su altre (Hayashi, Bentler & Yuan, 2008).

In realtà, più specificamente, i SEM corrispondono ad una famiglia di procedure correlate rivolte ad esaminare le relazioni lineari tra una o più variabili indipendenti (VI) e una o più variabili dipendenti (VD), che possono essere, sia nell’uno che nell’altro caso, misurate (ossia direttamente osservabili) o latenti (non direttamente osservabili e, quindi, misurate indirettamente tramite due o più indicatori rilevabili). D’altra parte, guardando alla storia, i SEM sono il risultato di differenti tradizioni di ricerca nel campo dell’analisi dei dati, come, ad esempio, la regressione multipla, la *path analysis*, l’analisi fattoriale esplorativa (Lawley & Maxwell, 1971), l’analisi fattoriale confermativa (Jöreskog, 1969) e i modelli di equazioni simultanee. Proprio per questo, si presentano come una metodologia unitaria in grado di analizzare sia modelli semplici che modelli di difficile o impossi-



bile trattazione con i singoli metodi precedenti (come, per esempio, quelli ibridi, multilivello o di crescita latente). Volendo ulteriormente chiarire la posizione occupata dai SEM nell'ambito dei modelli lineari generalizzati (*Generalized Linear Model*, GLM), basti pensare che una correlazione bivariata o un test  $t$  rappresentano la forma più semplice di GLM, una regressione multipla la forma intermedia e un modello di equazioni strutturali nella configurazione completa la forma più complessa.

Date queste caratteristiche, i SEM hanno goduto di una rapida crescita dai primi lavori di Jöreskog e colleghi (Jöreskog, 1970; Jöreskog & Sörbom, 1979; Jöreskog & van Thillo, 1972), trovando sempre più ampia applicazione nelle scienze socio-educative e comportamentali nel contesto internazionale (Hershberger, 2003; MacCallum & Austin, 2000; Tremblay & Gardner, 1996) e anche più recentemente in Italia (Chiesi, Menzione & Primi, 2005; Corbetta, 2002; Lucchini, 2007). Come sostenuto da diversi autori (Kim & Bentler, 2006; Raykov & Marcoulides, 2006; Ullman & Bentler, 2003; Yuan & Bentler, 2007), una simile diffusione è dovuta al vantaggio di poter:

- a. quantificare e testare complicati modelli teorici;
- b. includere sia variabili osservate sia variabili latenti.

E, inoltre, di poter:

- c. considerare, all'interno di uno stesso modello, le VD anche come predittori;
- d. tenere esplicitamente in considerazione l'errore di misurazione.

I SEM permettono, quindi, di testare modelli complessi che implicano non solo effetti diretti (ad es.  $A \rightarrow B$ ), ma anche effetti indiretti (come  $A \rightarrow C \rightarrow B$ ). Nel primo caso, si ha un legame diretto tra una variabile predittore (A) e una VD (B). Nel secondo caso, la relazione tra le due variabili è mediata da una o più variabili intervenienti (C), che sono sia VD, predette da A, sia variabili predittori di B. È proprio quest'ultima caratteristica che distingue i SEM dalla regressione, ovvero il fatto che una variabile può presentarsi sia come VD sia come VI allo stesso tempo, sollecitando l'uso di nuovi termini come quelli di variabile esogena e variabile endogena, l'una indicante una variabile unicamente indipendente e l'altra una VD che può anche essere predittore (e, quindi, agente come una VI) di una o altre variabili endogene. Tutto ciò consente, ovviamente, di meglio rispecchiare la natura dei fenomeni indagati, attraverso la costruzione di modelli teorico-analitici che tengano conto del vasto grado di articolazione della realtà. Inoltre, i SEM forniscono l'opportunità di inserire direttamente, nei modelli sottoposti a verifica, le variabili latenti (oltre a quelle manifeste), condizione di basilare importanza nelle scienze sociali dove la gran parte delle teorie fanno riferimento a costrutti non direttamente osservabili, qua-

li, ad esempio, l'intelligenza, la personalità o il supporto sociale. In questi casi, le variabili latenti vengono misurate attraverso indicatori multipli che sono soggetti a errore di misurazione. Diversamente da altri metodi, i SEM trattano gli errori di misurazione come aspetti rilevanti di un modello completo. Così, permettendo ad errori e residui di essere inclusi nei modelli, si riesce ad eliminare l'influenza da loro esercitata sulle relazioni tra le variabili di interesse, arrivando ad una comprensione più chiara dei possibili legami tra esse vigenti.

Detto ciò, sebbene i SEM costituiscano una famiglia di metodi statistici, tutti prevedono una stessa sequenza di base attraverso cui viene condotta l'analisi sui modelli esplicativi degli ipotetici nessi causali alla base dei dati osservati. Tale sequenza si compone di quattro fasi:

1. specificazione del modello;
2. stima (dei parametri strutturali) del modello;
3. valutazione del modello;
4. modifica del modello.

Nonostante lo scopo del capitolo sia rivolto alle questioni inerenti al processo di valutazione, cui sarà dedicata la parte più rilevante della trattazione, sarà comunque dato brevemente spazio anche alle altre fasi, ritenendo opportuno fornire la più ampia cornice di riferimento entro cui collocare i vari aspetti della verifica del modello. Di conseguenza, già in questa sezione saranno introdotte le fasi di specificazione e di stima del modello, nei due paragrafi successivi si tratterà estesamente della fase di valutazione e nel quarto paragrafo si discuterà della fase di modifica del modello.

Il punto di partenza per ogni SEM è la matrice di varianza-covarianza fra le variabili osservate ( $\mathbf{S}$ ), mentre il punto di arrivo è la stima dei parametri del modello ipotizzato. Ora, data  $\mathbf{S}$ , esistono differenti modelli causali fra variabili da cui può aver tratto origine, ma non è vero il contrario, vale a dire che un certo modello causale – a patto che sia identificato, come vedremo dopo – produce una ben definita matrice di covarianza  $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$ , intesa come matrice ricostruita utilizzando i parametri del modello. Tale matrice, confrontata con  $\mathbf{S}$ , consentirà di verificare la compatibilità del modello con i dati osservati. Anche in caso di elevata compatibilità, comunque, ciò non esclude che esistano modelli teorici alternativi ugualmente, se non meglio, ammissibili. Vale a dire che non è possibile «provare» la reale esistenza dei nessi causali ipotizzati, ma semplicemente «non disconfermarli» (Popper, 1970).

In ogni caso, prima di procedere col processo di falsificazione, lo stesso modello e le ipotesi causali in esso presenti vanno chiaramente formulati a partire dalla teoria per poi convertire le relative informazioni in un sistema di equazioni strutturali interpretabile dai software utilizzati per la stima e

la verifica. In altre parole, bisogna percorrere la fase di specificazione del modello che, generalmente, presuppone la definizione:

- a. delle variabili osservate e delle eventuali variabili latenti;
- b. delle variabili esogene e di quelle endogene;
- c. di tutti i legami tra le variabili in gioco, sia direzionali (causali), indicanti l'influenza ipotizzata di una variabile su un'altra, sia non direzionali, denotanti una semplice covariazione tra le variabili;
- d. dei parametri da fissare, da stimare o da vincolare secondo un qualche criterio.

Per una corretta specificazione del modello bisogna fare riferimento a un modello matematico in grado di formalizzare le relazioni fra le variabili e definirne i parametri. Probabilmente uno dei più intuitivi è quello di Bentler-Weeks (Bentler & Weeks, 1980), per il quale ogni variabile nel modello, osservata o latente, è una VI o una VD (rispettivamente corrispondenti a quanto già definito come variabile esogena e variabile endogena) e i parametri da stimare sono, da un parte, i coefficienti di regressione e, dall'altra, le varianze e le covarianze delle VI (tra cui considerare, a tutti gli effetti, i residui delle VD, osservate e latenti).

Di là dallo specifico metodo utilizzato, la costruzione del modello deve, ad ogni modo, garantire la risolvibilità matematica dello stesso, cioè il modello deve essere «identificato».

Il problema dell'identificazione rappresenta un'importante, quanto difficile, questione durante la fase di specificazione. Per sintetizzare, esso attiene all'esigenza di derivare una stima univoca per ogni parametro del modello. Difatti, durante la sua formulazione potrebbe succedere che, alla fine, esso sia compatibile con differenti insiemi di parametri strutturali (in tal caso, il modello sarà «non identificato» o «sotto-identificato») e questo va logicamente evitato giacché lo scopo dei SEM è di stimare i valori dei parametri presenti nella popolazione (Corbetta, 2002). Posto che un modello è identificato se i suoi parametri sono univocamente determinati, una semplice e necessaria condizione per la sua identificazione è che nel sistema vi siano più equazioni che parametri da stimare. Per verificare ciò basta sottrarre agli elementi non ridondanti (o osservazioni) della matrice di covarianza  $\mathbf{S}$  i detti parametri, attraverso l'espressione  $p(p + 1)/2 - q$ , dove  $p$  rappresenta il numero di variabili osservate all'interno del modello e  $q$  il numero di parametri da stimare. Tale espressione, in un sistema di equazioni, corrisponde ai gradi di libertà ( $gdl$ ) del sistema medesimo.

Ne risulta, indicativamente, che:

- se  $gdl < 0$ , il modello non è identificato e il ricercatore dovrà rimediare riducendo il numero di parametri da stimare, introducendo delle restrizioni (per esempio, fissandoli a 0 o vincolandone alcuni);

- se  $gdl = 0$ , il modello è appena identificato o «satturo» e, in questo caso, la matrice di covarianza  $\Sigma(\theta)$  coincide con la matrice  $S$  e, di conseguenza, non esiste un residuo attraverso cui sottoporre il modello a test;
- se  $gdl > 0$ , il modello è sovra-identificato ed esistono le condizioni per il test di falsificazione.

Va, comunque, notato che quest'ultima rimane una condizione necessaria ma non sufficiente per l'identificazione, ciò comportando l'obbligo di ulteriori approfondimenti che qui non possono trovare spazio, ad eccezione del problema della parametrizzazione delle variabili latenti (cfr. cap. 2). Queste ultime, difatti, non essendo osservate, mancano di una unità di misura, conducendo a problemi di identificazione e di stima dei parametri. In termini concreti, rimanendo indeterminata la scala di una variabile latente, non è possibile definire numericamente la sua relazione con una o più variabili osservate che da essa dipendono causalmente. Diventa indispensabile, pertanto, per ogni variabile latente presente in un determinato modello, fissare la metrica in uno dei seguenti modi sostanzialmente equivalenti:

- assegnarle una varianza pari ad una costante, generalmente 1, in modo da ottenere una variabile standardizzata;
- attribuirle la stessa metrica di una delle variabili osservate da essa dipendente (chiamata *anchor item*), fissando a 1 il valore del parametro (ovvero, il *factor loading*) che le lega.

Poiché, come detto sopra, parametri di un SEM sono i coefficienti di regressione e le varianze e covarianze delle VI, tali procedure sono entrambe valide nel caso di queste ultime, mentre per le variabili latenti dipendenti è applicabile solo la seconda. È utile, da ultimo, precisare che tutte le informazioni associate alla specificazione del modello possono essere espresse sia in forma matematica, per l'applicazione degli strumenti messi a punto dalla statistica, sia in forma diagrammatica attraverso la costruzione di *path diagrams*, i quali rendono possibile l'utilizzo e l'interpretazione dei SEM anche a chi non ha una pertinente specializzazione in merito. In ogni caso, la padronanza di procedure e strategie per la specificazione del modello è di fondamentale importanza, poiché può incidere profondamente sull'appropriatezza della stima dei parametri, che rappresenta il passo logico successivo.

In qualsiasi SEM, i parametri incogniti sono stimati in modo tale che il modello possa riprodurre il più possibile la matrice  $S$  e, in talune circostanze, le medie delle variabili osservate, come nel caso dei modelli della curva latente, spesso definiti LGM (*Latent Growth Model*; cfr. cap. 6), o nei modelli di misurazione con struttura della media (*Structured Means in Measurement Models*; vd. Kline, 2011). Ciò avviene attraverso un processo iterativo, che consiste nella selezione di quei valori dei parametri del mo-

dello che minimizzano la funzione di adattamento (si veda oltre) corrispondente al metodo di stima prescelto. Essendo la funzione di adattamento legata al residuo tra  $\mathbf{S}$  e  $\Sigma(\theta)$  tale processo ha termine, ovvero «converge», quando non è più possibile ridurre la distanza tra queste due matrici. Il risultato finale altresì origina, come detto, dai metodi di stima applicati: tra i principali (Raykov & Marcoulides, 2006), i minimi quadrati non ponderati (*Unweighted Least Squares*, ULS), i minimi quadrati generalizzati (*Generalized Least Squares*, GLS) e la massima verosimiglianza (*Maximum Likelihood*, ML). Il metodo di stima ULS usa come funzione di adattamento, denominata  $F_{\text{ULS}}$ , la semplice somma dei quadrati dei residui tra la matrice osservata  $\mathbf{S}$  e la matrice riprodotta  $\Sigma(\theta)$  e può essere usata allorché le variabili analizzate abbiano le stesse scale di misurazione; gli altri metodi, con funzioni  $F_{\text{GLS}}$  e  $F_{\text{ML}}$ , seguono in maniera più o meno complessa lo stesso approccio, ma dopo che specifici pesi sono stati usati per moltiplicare i residui. Fra tutti, quello più comunemente applicato è ML, finalizzato ad individuare quelle stime dei parametri del modello che massimizzano la probabilità di osservare i dati campionari ove si raccogliessero nuovamente i dati dalla stessa popolazione (Raykov, 2005).

I metodi ML e GLS sono stati sviluppati sotto l'assunzione della normalità multivariata, per cui possono essere applicati quando i dati osservati sono variabili metriche, discrete o continue, distribuite in tal senso. Essendo tale eventualità nella pratica poco frequente, gli studiosi si sono focalizzati sulla ricerca di altri metodi validi nel caso di deviazioni dalla normalità o dal livello di misurazione ottimale: la versione *robusta* del metodo della massima verosimiglianza (ML-R; Satorra & Bentler, 1994), l'*Asymptotic Distribution Free* (ADF; Browne, 1982, 1984) e il metodo dei minimi quadrati ponderati robusti (WLS-MV; Muthén & Kaplan, 1992) sono alcuni esempi di metodi pensati per fornire stime corrette dei parametri in presenza di non normalità e/o di variabili categoriali (vd. anche Anderson & Gerbing, 1984; Boomsma, 1982; Chou, Bentler & Satorra, 1991; Hu, Bentler & Kano, 1992; Kline, 2011; Lei & Wu, 2012; Tanaka, 1984).

Una volta sviluppate le fasi di specificazione prima e di stima poi, la domanda successiva riguarda la validità del modello che, per quanto finora detto, presuppone una seconda domanda, ovvero sia come valutare la misura della differenza tra le matrici  $\mathbf{S}$  e  $\Sigma(\theta)$ . È a simili questioni che si cercherà di rispondere nei prossimi paragrafi.



4.

# I MODELLI DI EQUAZIONI STRUTTURALI MULTI-GRUPPO E L'ESAME DELL'INVARIANZA FATTORIALE

*Claudio Barbaranelli*

«Sapienza» Università di Roma

doi: 10.7359/649-2013-barb

SOMMARIO: 1. Introduzione – 2. La teoria statistica – 2.1. Identificazione, stima e valutazione del modello – 3. Invarianza della misurazione (*Measurement Invariance*) – 4. Invarianza fattoriale – 4.1. L'invarianza fattoriale in una prospettiva storica – 4.2. I livelli di invarianza fattoriale: il contributo di Meredith – 4.3. Invarianza fattoriale e invarianza della misurazione: un commento finale – 4.4. Ipotesi supplementari: covarianze tra i fattori e varianze dei fattori – 4.5. Obiettivi della ricerca e forme di invarianza – 4.6. Invarianza parziale – 5. Un esempio empirico – 6. Conclusioni – 7. Riferimenti bibliografici.

## 1. INTRODUZIONE

In questo capitolo ci occuperemo di modelli di equazioni strutturali su gruppi multipli. La presentazione del materiale sarà focalizzata soprattutto sull'applicazione di tali modelli per l'esame dell'invarianza fattoriale. Dopo aver descritto le principali caratteristiche dei modelli su gruppi multipli, e la teoria statistica sulla quale essi si fondano, tratteremo i concetti di invarianza di misura e di invarianza fattoriale. Il capitolo presenterà un esempio completo di analisi su gruppi multipli, nel quale troveranno esemplificazione i diversi concetti esaminati. Infine verranno considerate alcune problematiche ancora aperte nello studio dell'invarianza fattoriale.

---

La ricerca psico-sociale spesso utilizza il confronto tra gruppi di soggetti rispetto al possesso di determinate caratteristiche (tratti di personalità, at-

teggiamenti, valori, attitudini, propensioni, ecc.), o rispetto alle relazioni che tali caratteristiche possono avere tra loro. I gruppi di soggetti possono essere preformati (o *intact*) oppure possono essere il risultato dell'assegnazione effettuata dal ricercatore a determinate condizioni (sperimentali o quasi-sperimentali). L'interpretabilità dei risultati ottenuti dipende fortemente dalla plausibilità dei confronti effettuati tra gruppi: questa a sua volta dipende dall'assunto che i costrutti oggetto di indagine siano *equivalenti* nei diversi gruppi. Tale asserzione è decisamente ambigua: come vedremo esistono differenti livelli di equivalenza, i quali implicano la soddisfazione di condizioni differenzialmente stringenti, e che rendono sensati differenti confronti tra gruppi.

In questo capitolo considereremo i modelli di equazioni strutturali su gruppi multipli (SEM-MG) come metodo per affrontare punti delineati sopra, poiché essi consentono di esaminare modelli simultaneamente su più campioni (appunto i *gruppi multipli*). Questa possibilità rappresenta un grande vantaggio perché si possono esaminare ipotesi sull'invarianza dei parametri attraverso i gruppi, dove ad esempio la relazione tra due variabili non cambia al variare dei valori di una terza variabile (quella che divide i soggetti in gruppi).

Da un altro punto di vista questa ipotesi riguarda l'assenza di *interazione*, o *modulazione*, dove per interazione si intende che, a differenti valori della variabile modulatrice o moderatrice, la relazione tra due altre variabili cambia. Allora, l'ipotesi di invarianza tra gruppi non è altro che un'ipotesi di *assenza* di modulazione/interazione. Nei modelli SEM-MG queste ipotesi sono esaminate tramite vincoli attraverso i gruppi. Se non c'è interazione (ovvero c'è invarianza), il valore dei parametri è lo stesso nei diversi gruppi. I modelli vincolati sono più parsimoniosi rispetto al modello di base non vincolato. Ogni vincolo introduce una restrizione nel valore che i parametri possono assumere, quindi aumenta la parsimonia del modello. Un vincolo su un parametro esamina l'ipotesi che il valore del parametro sia uguale attraverso i gruppi, ovvero che il parametro sia invariante attraverso i gruppi (ovvero che non vi sia effetto di moderazione della variabile che definisce i gruppi).

## 2. LA TEORIA STATISTICA

La teoria statistica sulla quale si fondano i modelli di equazioni strutturali su gruppi multipli è stata delineata in alcuni lavori pubblicati negli anni '70 da Jöreskog (1971), e Sörbom (1974, 1978). Questi lavori sono stati

ripubblicati da Jöreskog e Sörbom nel 1979 nel volume *Advances in factor analysis and structural equation models*. Il modello statistico considerato dagli autori è quello implementato nel programma LISREL (Jöreskog & Sörbom, 1996).

È noto che tale modello si basa sulle equazioni matriciali (1) e (2) che definiscono il modello di misura per le variabili latenti e sulla equazione matriciale (3) che definisce le relazioni strutturali tra le variabili latenti (vd. anche l'Appendice):

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Lambda}_x \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta} \quad (1)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{\Lambda}_y \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{B} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{\Gamma} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta} \quad (3)$$

Solitamente il modello definito dalle equazioni precedenti viene esaminato considerando uno specifico campione C. Nel caso in cui il modello venga esaminato su più campioni o gruppi di soggetti, si presuppone che il modello specificato dalle precedenti equazioni sia tenibile in tutti i  $G_g$  gruppi esaminati (con  $g$  che va da 1 a  $g$ ). In questo caso, il modello per uno specifico gruppo  $g$  è definito dalle equazioni (4)-(6):

$$\mathbf{x}^{(g)} = \mathbf{\Lambda}_x^{(g)} \boldsymbol{\xi}^{(g)} + \boldsymbol{\delta}^{(g)} \quad (4)$$

$$\mathbf{y}^{(g)} = \mathbf{\Lambda}_y^{(g)} \boldsymbol{\eta}^{(g)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(g)} \quad (5)$$

$$\boldsymbol{\eta}^{(g)} = \mathbf{B}^{(g)} \boldsymbol{\eta}^{(g)} + \mathbf{\Gamma}^{(g)} \boldsymbol{\xi}^{(g)} + \boldsymbol{\zeta}^{(g)} \quad (6)$$

Il modello prevede, oltre alle quattro matrici di effetti diretti definite nelle precedenti equazioni, le seguenti matrici di varianze e covarianze:  $\boldsymbol{\Phi}^{(g)}$ ,  $\boldsymbol{\Psi}^{(g)}$ ,  $\boldsymbol{\Theta}_\varepsilon^{(g)}$ ,  $\boldsymbol{\Theta}_\delta^{(g)}$ . Nei modelli in cui viene data una struttura alle medie delle variabili, vanno poi aggiunti i vettori di intercette  $\boldsymbol{\tau}_x$ ,  $\boldsymbol{\tau}_y$  e  $\boldsymbol{\alpha}$ , e di medie  $\boldsymbol{\kappa}$ , relativi rispettivamente alle variabili  $x$ ,  $y$ ,  $\eta$  e  $\xi$ , per cui le equazioni (1), (2) e (3) diventano così (per una definizione del termine intercetta si veda il § 4.2):

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\tau}_x + \mathbf{\Lambda}_x \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta} \quad (1bis)$$

$$\mathbf{y} = \boldsymbol{\tau}_y + \mathbf{\Lambda}_y \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2bis)$$

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{B} \boldsymbol{\eta} + \mathbf{\Gamma} \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\zeta} \quad (3bis)$$

Ognuna delle matrici definite sopra può contenere:

- parametri fissi (ovvero, fissati ad un valore predeterminato dal ricercatore, solitamente 0 o 1);



- parametri liberi (ovvero stimati liberamente, senza imporre alcuna restrizione);
- parametri vincolati (ovvero parametri «liberi» sui quali sono stati imposti vincoli, ad esempio vincoli di uguaglianza entro e/o attraverso i gruppi).

In assenza di vincoli tra i gruppi l'analisi multigruppo non aggiunge nulla rispetto all'analisi dei gruppi effettuata separatamente. In presenza di vincoli tra i gruppi è possibile analizzare i dati di tutti i gruppi in modo da ottenere stime più efficienti dei parametri.

Un'assunzione fondamentale per i modelli SEM-MG è che i  $g$  gruppi considerati debbano provenire da un insieme di  $g$  popolazioni  $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_g$  indipendenti. L'applicabilità di tale modello riguarda differenti condizioni, per cui tali popolazioni possono essere differenti nazioni, differenti gruppi culturali, differenti gruppi selezionati sulla base di una variabile di selezione nota, gruppi che ricevono differenti trattamenti, ecc. Il requisito fondamentale per il modello su gruppi multipli è che le popolazioni siano chiaramente definite e i campioni *indipendenti*. Come per i modelli su gruppi singoli, si presuppone che vengano analizzate matrici di covarianze e non matrici di correlazioni.

Nell'ambito del modello definito dalle equazioni multi-gruppo introdotte sopra, è possibile esaminare qualsiasi tipo di ipotesi relativa all'invarianza, considerando come ipotesi estreme quelle in cui: (a) tutti i parametri *non* sono invarianti; (b) tutti i parametri *sono* invarianti. Anche se non è necessario che nei diversi gruppi siano stati rilevati esattamente lo stesso numero e lo stesso tipo di variabili, le ipotesi più interessanti di solito implicano che esista almeno un nucleo comune di variabili. Negli esempi che considereremo più avanti nel testo, esamineremo modelli che hanno esattamente le stesse variabili in ogni gruppo.



5.

## MEDIAZIONE E MODERAZIONE NELLA PROSPETTIVA DEI MODELLI DI EQUAZIONI STRUTTURALI

Gaetano «Nino» Miceli

Università degli Studi della Calabria

doi: 10.7359/649-2013-mice

SOMMARIO: 1. Introduzione – 2. Le analisi di mediazione: l'applicazione dell'approccio dei *causal steps* – 3. Le analisi di mediazione: l'applicazione dei modelli di equazioni strutturali – 4. Le analisi di moderazione: l'applicazione dei modelli di regressione – 5. Le analisi di moderazione: l'applicazione dei modelli di equazioni strutturali – 6. Riferimenti bibliografici.

### 1. INTRODUZIONE

Lo studio delle relazioni di mediazione e moderazione nelle scienze sociali è di particolare rilevanza sia dal punto di vista concettuale che applicativo. Da un lato, l'analisi di una relazione indiretta basata su una o più variabili di mediazione permette di teorizzare e testare i *processi* o i *meccanismi* che determinano un rapporto di causa-effetto. Dall'altro, l'analisi di una relazione condizionata da una o più variabili di moderazione consente di valutare le specifiche *condizioni* in cui un rapporto causale cambia in termini di intensità e/o segno (Baron & Kenny, 1986).

Nel caso più semplice, una relazione indiretta, o con variabile di mediazione, prevede che la variabile indipendente X causi la variabile dipendente Y tramite la variabile di mediazione ME. Nello specifico, X influenza ME, che a sua volta influenza Y. La *Fig. 1* mostra un esempio di relazione indiretta, in cui X = significato condiviso evocato dallo stimolo, ME = fluidità dell'elaborazione dello stimolo, Y = atteggiamento verso lo stimolo.

Nell'esempio, la proprietà di uno stimolo (e.g., un logo, un quadro) di trasmettere un significato chiaro e condiviso influenza positivamente l'atteggiamento verso lo stimolo stesso. Tale effetto è guidato da uno specifico meccanismo psicologico, ovvero la fluidità (*fluency*) di elaborazione.

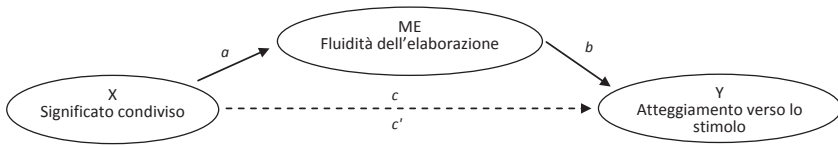


Fig. 1. – Un esempio di relazione indiretta con variabile di mediazione.

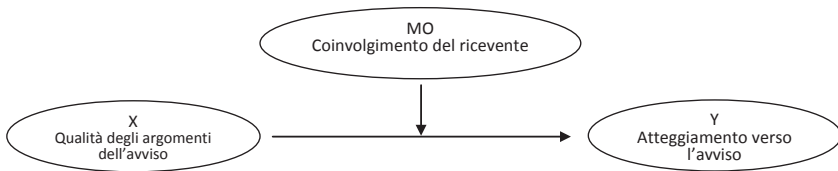


Fig. 2. – Un esempio di relazione condizionata con variabile di moderazione.

Un significato chiaro e condiviso genera nell'individuo, infatti, un senso di familiarità che rende l'elaborazione più fluida; a sua volta, tale fluidità genera, *ceteris paribus*, un atteggiamento più favorevole verso lo stimolo elaborato.

Una relazione condizionata, o con variabile di moderazione, prevede che l'effetto della variabile indipendente X sulla variabile dipendente Y dipenda in termini di intensità e/o di segno dalla variabile di moderazione MO. Nello specifico, l'effetto di X su Y cambia in funzione dei valori assunti da MO. La Fig. 2 mostra un esempio di relazione condizionata, in cui X = qualità degli argomenti in un avviso pubblicitario, MO = coinvolgimento del ricevente, Y = atteggiamento verso l'avviso pubblicitario.

Nell'esempio, con elevato coinvolgimento del ricevente, la qualità degli argomenti in un avviso pubblicitario influenza positivamente l'atteggiamento verso l'avviso stesso, mentre con basso coinvolgimento del ricevente, la qualità degli argomenti non ha effetto sull'atteggiamento verso l'avviso.

## 2. LE ANALISI DI MEDIAZIONE:

### L'APPLICAZIONE DELL'APPROCCIO DEI CAUSAL STEPS

Dal punto di vista applicativo, il test di relazioni di mediazione è stato, per molti anni, demandato alle procedure suggerite da Judd e Kenny (1981) e Baron e Kenny (1986). Gli autori hanno indicato, in uno degli articoli più

citati in assoluto nelle scienze sociali, i *causal steps* da testare per verificare una relazione indiretta. In particolare, Baron e Kenny (1986) sostengono che la verifica di una relazione indiretta richieda la stima di tre equazioni di regressione:

$$ME = i_1 + aX + e_1 \quad (1)$$

$$Y = i_2 + cX + e_2 \quad (2)$$

$$Y = i_3 + bME + c'X + e_3 \quad (3)$$

Nella prospettiva di Judd e Kenny (1981), è possibile sostenere l'esistenza di una relazione indiretta *completa* se i parametri  $a$ ,  $b$  e  $c$  risultano significativi, mentre il parametro  $c'$  non è significativo. Tali evidenze suggerirebbero che la variabile indipendente  $X$  influenza la variabile di mediazione  $ME$  e la variabile dipendente  $Y$ ; quest'ultima è influenzata, inoltre, dalla variabile di mediazione  $ME$ ; aspetto ancor più rilevante, controllando per l'effetto di  $ME$  su  $Y$ , l'effetto di  $X$  su  $Y$  scompare, verificando la completa mediazione dell'effetto di  $X$  su  $Y$  da parte di  $ME$ . Successivamente, Baron e Kenny (1986) hanno evidenziato che è possibile verificare un'ipotesi di *mediazione parziale* se il parametro  $c'$  nell'equazione (3) è significativamente inferiore rispetto al parametro  $c$  nell'equazione (2): in tal caso, l'effetto di  $X$  su  $Y$  è in parte diretto e in parte indiretto (tramite  $ME$ ). Questa prospettiva tiene in considerazione la possibilità che esistano altri mediatori rilevanti non inseriti nel modello concettuale.

Alla luce di tale impostazione, l'effetto di mediazione può essere calcolato seguendo due approcci. L'approccio del *prodotto tra parametri* prevede che l'effetto indiretto di  $X$  su  $Y$  sia rappresentato dal prodotto dei parametri  $a \times b$ , dal momento che la mediazione dipende dall'intensità con cui  $X$  influenza  $ME$  e quest'ultimo influenza  $Y$ . L'approccio della differenza, invece, considera la discrepanza  $c - c'$  come rappresentativa dell'effetto di mediazione. MacKinnon et al. (1995) hanno dimostrato che, nell'ambito di modelli di regressione lineare, i due approcci sono algebricamente equivalenti, ed è quindi indifferente valutare e testare in termini inferenziali un effetto indiretto basandosi sul termine  $a \times b$  oppure sulla differenza  $c - c'$ .

La procedura di Baron e Kenny (1986) è stata più comunemente associata al test formale dell'effetto indiretto, nella forma di prodotto dei parametri  $a \times b$ , tramite il metodo di Sobel (1982). L'autore, tramite l'applicazione del metodo Delta multivariato<sup>1</sup> (Rao, 1973; Bishop, Fienberg &

---

<sup>1</sup> Il metodo Delta multivariato prevede che la varianza di una funzione di più parametri sia uguale alla matrice delle varianze-covarianze tra i parametri (indicata con  $\mathbf{V}$ ) pre- e post-moltiplicata per il vettore delle derivate prime parziali della funzione rispetto

Holland, 1975; Bollen, 1987), ha derivato la formula dell'errore standard del prodotto  $a \times b$ :

$$se_{a \times b} = \sqrt{a^2 \times se_b^2 + b^2 \times se_a^2} \quad (4)$$

In realtà, la formula (4) assume che la covarianza tra i parametri  $a$  e  $b$  sia uguale a zero. Tale assunzione è in pratica non verificabile nell'ambito di modelli di regressione stimati separatamente. In modelli con stima simultanea e/o con variabili latenti (e.g., modelli di equazioni di equazioni strutturali) tale assunzione può essere effettivamente sottoposta a verifica. Nei casi in cui la covarianza tra i parametri  $a$  e  $b$  non sia uguale a zero, è possibile dimostrare, tramite l'applicazione del metodo Delta multivariato, che l'errore standard del termine  $a \times b$  è uguale a

$$se_{a \times b} = \sqrt{a^2 \times se_b^2 + b^2 \times se_a^2 + 2ab \times \text{COV}(a, b)} \quad (5)$$

Il test proposto da Sobel, che segue una distribuzione normale standardizzata, è quindi:

$$z_{a \times b} = \frac{a \times b}{\sqrt{a^2 \times se_b^2 + b^2 \times se_a^2}} \quad (6)$$

ovvero, in termini più generali, e soprattutto in caso di covarianza tra i parametri  $a$  e  $b$  diversa da zero:

$$z_{a \times b} = \frac{a \times b}{\sqrt{a^2 \times se_b^2 + b^2 \times se_a^2 + 2ab \times \text{COV}(a, b)}} \quad (7)$$

Un test  $z$  significativo (e.g., con  $p < .05$ ) segnala l'esistenza di una relazione indiretta significativa, completa (se il parametro  $c'$  non è significativo) o parziale (se il parametro  $c'$  è significativo).

Le applicazioni del metodo dei *causal steps* e del test di Sobel risultano predominanti in tutte le scienze sociali (e.g., Iacobucci et al., 2007; Fritz & MacKinnon, 2007; Lockart et al., 2011), con particolare frequenza negli studi sperimentali. Nonostante tale popolarità, è risaputo che l'approccio dei *causal steps* è caratterizzato da una serie di limitazioni che, in molti casi, possono pregiudicare la validità del test di mediazione. Nello specifico (Iacobucci et al., 2007; MacKinnon, 2008):

- a. I parametri di regressione potrebbero essere sottostimati nella misura in cui le variabili indipendenti sono soggette a errore di misurazione non controllato (DeVellis, 1991); una sottostima dei parametri  $a$  e  $b$  genera

---

ai singoli parametri (indicato con  $\mathbf{D}$ ). In particolare, la varianza di  $f(a, b, c, \dots, z) = \mathbf{D}' \times \mathbf{V} \times \mathbf{D}$ .

- una riduzione nel termine  $a \times b$  e una conseguente riduzione della potenza del test di Sobel.
- b. Se X, ME e/o Y sono misurate con indicatori multipli, il ricercatore è costretto a usare punteggi medi o comunque valori aggregati, che in molti casi possono rappresentare una soluzione ragionevole, ma certamente non ottimale rispetto a obiettivi di operazionalizzazione di costrutti latenti (Iacobucci et al., 2007).
  - c. La stima separata delle equazioni di regressione (1), (2) e (3) non permette di stimare parametri ed errori standard (che partecipano poi al calcolo del test  $z$ ) *condizionalmente* a tutti gli elementi (variabili, errori stocastici e parametri stessi) presenti nel modello concettuale; non è possibile quindi escludere che variabili non incluse nei modelli di regressione, «contenute» nei termini  $e_1$ ,  $e_2$  ed  $e_3$ , possano influenzare sistematicamente le variabili dipendenti, perché la stima non simultanea non permette di controllare le eventuali e indesiderate correlazioni tra errori stocastici; usando la metafora citata da Iacobucci et al. (2007), modelli stimati separatamente rischiano di comparare arance e mele, mentre una stima simultanea delle equazioni di regressione assicurerebbe la comparazione di mele con mele.
  - d. Se il modello concettuale prevede la presenza di variabili di mediazione multiple, l'applicazione dei *causal steps* nell'ambito di modelli di regressione multipli non consente di analizzare gli *effetti indiretti specifici*, ovvero gli effetti di mediazione relativi alle specifiche variabili di mediazione  $ME_1$ ,  $ME_2$ , ...,  $ME_k$  (MacKinnon, 2008); considerando che l'effetto di X su Y controllando per ME è espresso dal parametro  $c'$ , che l'effetto indiretto di X su Y è rappresentato dal prodotto dei parametri  $a \times b$ , l'effetto totale di X su Y è uguale ad  $a \times b + c'$ . In presenza di mediatori multipli, però, l'effetto indiretto totale comprenderà effetti specifici per ogni mediatore, ovvero  $a_1 \times b_1$ ,  $a_2 \times b_2$ , ...,  $a_k \times b_k$ ; l'analisi dettagliata di tali effetti indiretti specifici non può essere svolta tramite i *causal steps* e l'applicazione di modelli di regressione separati.
  - e. Il test di Sobel è stato sviluppato assumendo una distribuzione normale standardizzata, cioè simmetrica; in realtà, MacKinnon et al. (2007) hanno segnalato che il termine  $a \times b$  segue più frequentemente una distribuzione asimmetrica e che l'uso del metodo di Sobel può comportare stime non corrette dell'intervallo di confidenza dell'effetto indiretto e una riduzione della potenza del test.
  - f. Infine, i *causal steps* potrebbero indurre il ricercatore a scartare modelli con effetti di mediazione *inconsistenti*, ovvero i casi in cui X non ha effetto su Y nell'equazione (2), ma in cui lo stesso effetto diventa significativo e di segno opposto all'effetto indiretto  $a \times b$  nell'equazione (3); in questi

casi, comunque potenzialmente rilevanti, la variabile di mediazione assume il ruolo di *soppressore*, facendo aumentare (invece che diminuire) l'effetto di X su Y nell'equazione (3) (MacKinnon et al., 2000).

Oltre a questi aspetti teorici, Iacobucci et al. (2007) hanno dimostrato, nell'ambito di una serie di simulazioni, che la stima non simultanea delle equazioni di regressione determina errori standard sistematicamente più alti rispetto al caso di stima simultanea delle stesse equazioni. Inoltre, contrariamente a quanto affermano alcune regole pratiche, che suggeriscono l'adozione di tecniche più semplici (e.g., regressione multipla) rispetto a quelle più sofisticate (e.g., modelli di equazioni strutturali) nel caso di campioni ridotti (i.e., inferiori alle 100 unità), la sovrastima degli errori standard è più elevata proprio in quest'ultimo caso.

L'applicazione di procedure *bootstrap* (che prevedono un certo numero di estrazioni dalla distribuzione del termine  $a \times b$  al fine di determinarne la variabilità e gli intervalli di confidenza) ai risultati delle regressioni considerate dall'approccio dei *causal steps* (Preacher & Hayes 2004) può contribuire ad aumentare la potenza del test, evitando l'utilizzo di assunzioni di normalità, oltre che a gestire il caso di mediatori multipli (Preacher & Hayes, 2008). Alternativamente, MacKinnon et al. (2007) hanno codificato il software PRODCLIN2 (disponibile sul sito <http://www.public.asu.edu/~davidpm/ripl/Prodclin/>), che permette di calcolare, attraverso una procedura iterativa, i limiti inferiori e superiori dell'intervallo di confidenza dell'effetto indiretto sulla base del metodo analitico proposto da Meeker et al. (1981). Tale approccio ricostruisce correttamente la distribuzione asimmetrica del termine  $a \times b$  e consente di ridurre ulteriormente i rischi associati a un test simmetrico e meno potente. PRODCLIN2 richiede come input i valori dei parametri (non standardizzati)  $a$  e  $b$ , gli errori standard di  $a$  e  $b$ , e la correlazione tra  $a$  e  $b$ .

Nonostante questi recenti avanzamenti applicabili alla procedura dei *causal steps*, un test puntuale di un effetto di mediazione, che preveda il controllo di correlazioni tra errori stocastici, mediatori multipli ed errori di misurazione, richiede la stima simultanea delle relazioni tra X, ME e Y. La soluzione ideale consiste nell'applicazione dei modelli di equazioni strutturali.



6.

## L'ANALISI DEI DATI LONGITUDINALI: LO STUDIO DELLA STABILITÀ E DEL CAMBIAMENTO CON I MODELLI DI EQUAZIONI STRUTTURALI

*Roberta Fida*

«Sapienza» Università di Roma

*Michele Vecchione*

«Sapienza» Università di Roma

doi: 10.7359/649-2013-fida

SOMMARIO: 1. Introduzione – 2. I modelli autoregressivi – 2.1. Un esempio di applicazione dei modelli autoregressivi – 3. I modelli di curve di crescita – 4. Conclusioni – 5. Riferimenti bibliografici.

### 1. INTRODUZIONE

L'oggetto di questo capitolo è approfondire l'analisi della stabilità e del cambiamento nelle ricerche longitudinali utilizzando l'approccio dei modelli di equazioni strutturali (SEM). In particolare saranno presentati due modelli molto diffusi per l'analisi dei dati longitudinali, i modelli autoregressivi e i modelli di curve di crescita. Questi modelli verranno descritti sia da un punto di vista formale sia da un punto di vista applicativo, presentando alcuni esempi empirici che possono aiutare il lettore a comprenderne le finalità.

In linea generale le ricerche longitudinali ci informano su ciò che accade ad un gruppo di soggetti nel corso del tempo (Taris, 2000), tramite l'osservazione ripetuta di una o più variabili (van der Kamp & Bijleveld, 1998). Questo tipo di ricerche si differenzia dalle ricerche *cross-sezionali*, in cui le variabili di interesse vengono rilevate in un momento specifico. Come sottolineato da Bollen e Curran (2006), l'analisi dei dati longitudinali ha una lunga tradizione nelle scienze sociali, Soprattutto nel corso degli ultimi decenni si è assistito ad un considerevole incremento dell'interesse verso questa tematica. Sono diversi i motivi alla base di questa crescente atten-



zione per l'analisi dei dati longitudinali. Da un lato, le peculiarità di questo tipo di dati consentono di superare molti limiti dei dati cross-sezionali. In particolare, solo le ricerche che utilizzano dati longitudinali consentono di esaminare in modo appropriato un'ipotesi teorica sullo sviluppo e il cambiamento. D'altra parte si registra una sempre maggiore disponibilità di *panel*, ovvero di ricerche che seguono nel corso del tempo bambini, adulti, comunità o Paesi.

I vantaggi dell'utilizzo degli studi longitudinali rispetto a quelli cross-sezionali risiedono nella possibilità di esaminare il grado in cui un determinato costrutto è stabile o subisce dei cambiamenti lungo un determinato periodo di tempo, ed eventualmente di caratterizzare la natura di tali cambiamenti. Essi, inoltre, consentono di descrivere i cambiamenti intra-individuali e quelli inter-individuali nel corso tempo, e dunque di monitorare l'ampiezza e i pattern di cambiamento. In questo modo le stime sui trend di un fenomeno (o costrutto) possono essere utilizzate da un lato per comprendere l'eterogeneità della popolazione rispetto alla presenza e all'entità del cambiamento e dall'altro per spiegare il cambiamento sulla base di altre dimensioni sia stabili nel tempo (come il genere) che mutevoli (come ad esempio il reddito). Da un punto di vista statistico, inoltre, a parità di numerosità campionaria, i disegni longitudinali hanno una potenza statistica maggiore rispetto a quelli cross-sezionali (Hedeker & Gibbons, 2006) poiché, in generale, la variabilità intra-individuale è sostanzialmente minore di quella inter-individuale.

Sono numerose le tecniche analitiche o modelli disponibili per l'analisi dei dati longitudinali, alcune delle quali si collocano all'interno della cornice dei SEM. Raramente si può concludere che un modello sia corretto o incorretto. Piuttosto i vari modelli differiscono rispetto alla loro capacità di adattarsi all'orientamento teorico che guida la ricerca, e al grado in cui le loro assunzioni sono conformi alle caratteristiche dei dati empirici. Da questa prospettiva una particolare tecnica analitica può andar bene per un'applicazione ma non per un'altra. Per esempio possono essere utili ad uno psicologo per indagare lo sviluppo delle abilità cognitive in una determinata fase del ciclo di vita, ad un sociologo per esaminare l'andamento nel tempo dei crimini in una data comunità, ad un economista per studiare lo sviluppo economico di una data regione o l'andamento delle vendite di un particolare prodotto.

Nei prossimi paragrafi verranno introdotti due modelli di analisi dei dati longitudinali: i modelli autoregressivi e quelli di curve di crescita. Verranno descritte le finalità, le equazioni e i parametri del modello, nonché i rispettivi punti di forza e di debolezza. Infine saranno presentati i passi relativi alla specificazione, l'identificazione e la stima dei parametri attraverso

alcuni esempi empirici tratti dalla psicologia dello sviluppo e dell'educazione. Queste applicazioni non illustrano solamente esempi di successo dell'uso di queste metodologie ma anche i problemi più comuni che i ricercatori possono incontrare quando utilizzano questi tipi di tecniche.

## 2. I MODELLI AUTOREGRESSIVI

I modelli autoregressivi, chiamati anche modelli *simplex*, sono uno degli approcci più diffusi nell'ambito delle tecniche di analisi dei dati longitudinali. Essi hanno origine nell'ambito delle analisi delle serie temporali, ma nel corso degli anni hanno raggiunto una particolare popolarità soprattutto nell'ambito dei SEM. In questo paragrafo sarà presentata l'origine di tali modelli e la loro definizione. Successivamente verrà descritto il modello matematico e le sue assunzioni statistiche. Infine saranno indicati i loro vantaggi e i potenziali limiti.

I modelli autoregressivi sono stati proposti originariamente negli anni '50 da Guttman (1954) nell'ambito dello studio delle abilità mentali. Utilizzando dati cross-sezionali, l'autore ha esaminato la struttura delle correlazioni tra una serie di test di abilità ordinati sulla base della loro complessità, dal più semplice al più complesso (per una trattazione approfondita del modello di Guttman si rimanda al capitolo di Peter Bentler in questo volume). Nella matrice di correlazione di questi dati le associazioni diminuiscono di grandezza sulla base della distanza dalla diagonale della matrice stessa. In altre parole, le correlazioni erano più elevate vicino alla diagonale e diminuivano sistematicamente man mano che la distanza tra le variabili aumentava. I modelli che danno origine a questo tipo di struttura sono stati definiti *simplex*. Questo termine caratterizza i modelli autoregressivi perché la stessa struttura si osserva nelle matrici di dati longitudinali, in cui le variabili osservate rappresentano il punteggio nello stesso test somministrato in tempi differenti. In particolare, in tali matrici l'ampiezza delle correlazioni dipende dalla distanza temporale che intercorre tra una rilevazione e l'altra: all'aumentare della distanza, la correlazione tra le misure tende a diminuire.

Una caratteristica distintiva dei modelli autoregressivi è che una misura in un dato punto nel tempo è determinata dalla misura della stessa variabile al tempo precedente. In altre parole la misura di una variabile al tempo  $t_1$  determina il punteggio al tempo  $t_2$ , che a sua volta determina il punteggio al tempo  $t_3$ , e così via. In questo tipo di modelli il cambiamento di un costrutto nel tempo è una funzione additiva dell'influenza dello stesso costrutto

misurato nel tempo precedente più una componente residuale. Questi modelli vengono chiamati *autoregressivi* proprio perché la variabile viene fatta regredire su se stessa. Nei modelli autoregressivi tradizionali sono stimati solamente i nessi tra le variabili misurate in punti di tempo adiacenti (questi modelli vengono definiti anche modelli autoregressivi *di primo ordine*).

L'equazione generale per le variabili osservate è

$$y_{it} = \alpha_t + \beta_{t,t-1} y_{it-1} + \varepsilon_{it}$$

dove  $\alpha_t$  è l'intercetta dell'equazione per il tempo  $t$ ,  $\beta_{t,t-1}$  è il parametro autoregressivo, ovvero il coefficiente di regressione che consente di predire  $y$  al tempo  $t$  sulla base della stessa variabile misurata al tempo immediatamente precedente ( $t - 1$ ). Esso indica l'impatto del valore precedente di  $y$  sul valore del tempo corrente, e quindi riflette la componente di stabilità della varianza di  $y$  tra i due tempi. Il termine di errore,  $\varepsilon$ , include, in questo caso, oltre all'errore di misura anche l'instabilità delle risposte tra i due tempi di misurazione. In definitiva, quindi, i modelli autoregressivi consentono di separare la stabilità dall'instabilità. La proporzione di varianza non spiegata in ciascun punto di tempo rappresenta proprio la componente instabile della varianza totale della variabile osservata.

Alla base dei modelli autoregressivi vi sono alcune assunzioni statistiche relative ai termini residuali, i quali: (a) si devono distribuire normalmente; (b) devono essere centrati sulla media; (c) non devono essere correlati con il punteggio in  $y$  immediatamente precedente. Inoltre, sebbene tecnicamente sia possibile stimare le correlazioni tra i residui, in genere si assume che siano indipendenti (in senso stretto, tale condizione è necessaria solo quando si utilizzano alcuni metodi di stima, quali ad esempio i *minimi quadrati ordinari*, OLS).

La figura seguente (*Fig. 1*) mostra il diagramma di un modello autoregressivo di primo ordine con 4 rilevazioni. Questa è una tipica struttura autoregressiva, che rappresenta anche un modello di mediazione totale (per una trattazione di questi modelli si veda il capitolo di Nino Miceli in questo volume), in cui gli effetti diretti sono stimati solamente tra misure adiacenti, mentre la relazione tra due misure non adiacenti è indiretta, ovvero mediata dalle misure che si collocano tra di esse. I nessi diretti tra misure non adiacenti, invece, non sono contemplati. Nei modelli autoregressivi di primo ordine, infatti, la correlazione tra due tempi non adiacenti (es. Y1 e Y3) approssima zero quando le misure intervenienti (Y2) sono tenute sotto controllo. Di conseguenza, la matrice di correlazioni riprodotta è calcolata come nella *path analysis*: quando le variabili sono standardizzate le correlazioni tra misure non adiacenti sono riprodotte moltiplicando tutti gli effetti diretti (coefficienti beta) che si trovano lungo il percorso che collega le due

variabili. Ad esempio, la correlazione tra  $Y_1$  e  $Y_3$  può essere riprodotta moltiplicando  $\beta_{21}$  con  $\beta_{32}$ .

Una versione più restrittiva del modello simplex assume la cosiddetta *stazionarietà*, che si realizza quando i cambiamenti che si verificano ad ogni rilevazione si mantengono costanti nel corso del tempo (ovvero  $\beta_{21} = \beta_{32} = \beta_{43}$ ). Questa assunzione è plausibile nelle situazioni in cui le rilevazioni della variabile  $y$  siano egualmente spaziate nel tempo. La stazionarietà può essere esaminata empiricamente imponendo dei vincoli di uguaglianza nei parametri autoregressivi ( $\beta$ ), ed esaminando il cambiamento nel *fit* del modello che si verifica in seguito a tale restrizione. Poiché l'ampiezza dei parametri autoregressivi dipende anche dall'attendibilità delle misure, oltre che dalla stabilità delle variabili  $y$ , una condizione necessaria per trarre delle conclusioni circa la stazionarietà del modello è che le  $y$  mantengano la stessa attendibilità nel corso del tempo (Kenny & Campbell, 1989). Per verificare questa assunzione è necessario imporre dei vincoli di uguaglianza anche sulle varianze residue ( $\theta$ ).

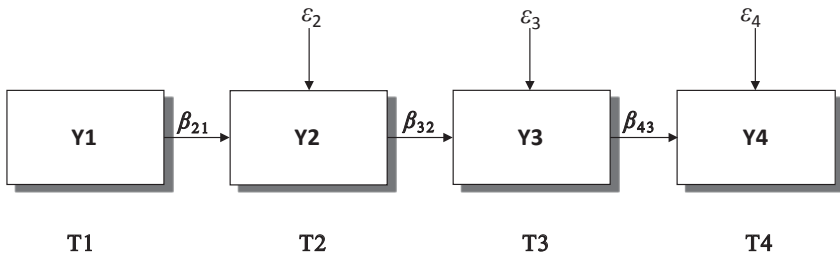


Fig. 1. – Presentazione diagrammatica di un modello autoregressivo di primo ordine.

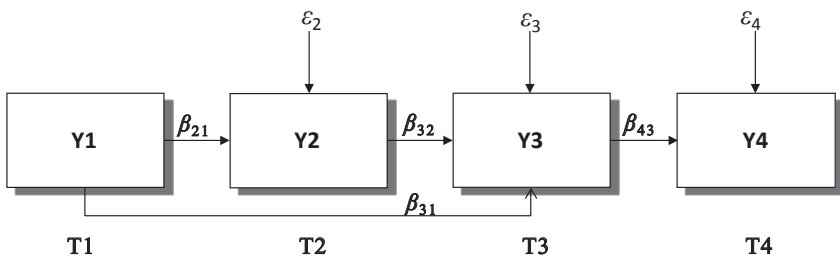


Fig. 2. – Rappresentazione diagrammatica di un modello autoregressivo di secondo ordine.

I modelli autoregressivi di *secondo ordine* rappresentano una variante dei modelli appena descritti, in cui vengono stimati ulteriori parametri. Nei modelli di primo ordine, infatti, può essere necessario stimare uno o più nessi diretti tra misure non adiacenti, ad esempio per migliorare la bontà di adattamento. Il modello riportato nella Fig. 2 presenta un esempio di modello autoregressivo di secondo ordine, in cui la variabile misurata al tempo 1 influenza sia la variabile misurata al tempo 2 sia quella misurata al tempo 3.

Una delle fonti più frequenti di *misfit* nei modelli autoregressivi è rappresentato dall'errore di misura. Come anticipato, infatti, in questi modelli la varianza residua include sia l'errore di misura che la varianza dovuta all'instabilità. Queste due componenti, pertanto, non possono essere separate. Di conseguenza l'errore di misura attenua la stima del coefficiente di stabilità (Jöreskog, 1970). Per ovviare a questo tipo di problema è possibile stimare i modelli più complessi, che consentono di prendere in considerazione l'errore di misura. In questi modelli, chiamati *quasi-simplex*, è possibile esaminare la stabilità dopo che le variabili sono state corrette per l'inattendibilità delle misure. Un esempio è presentato nella Fig. 3. Come è possibile osservare, le relazioni autoregressive vengono stimate a livello delle variabili latenti piuttosto che tra le variabili osservate. Questo modello è ovviamente preferibile ai modelli *simplex* presentati precedentemente, specialmente nei casi in cui si analizzano variabili che presentano una proporzione sostanziale di errore di misura, poiché consente di separare la parte di instabilità dovuta al cambiamento da quella attribuibile all'errore di misura.

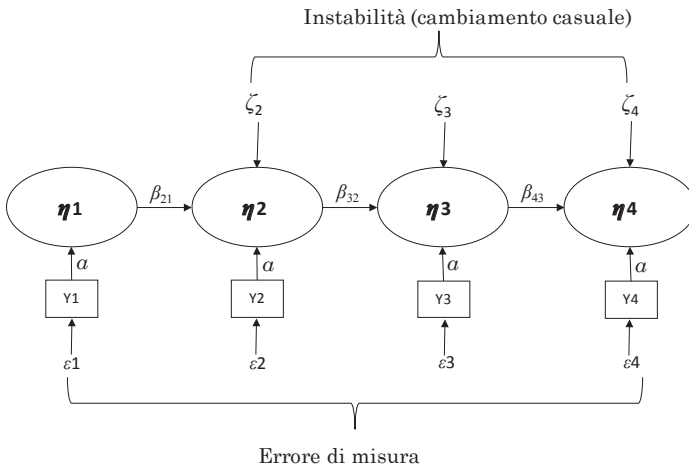


Fig. 3. – Rappresentazione diagrammatica di un modello quasi-simplex.

Nei modelli *quasi-simplex* i coefficienti di regressione che legano la variabile latente con quella osservata sono fissati ad 1. In questo modello le  $\varepsilon$  rappresentano la non attendibilità delle variabili osservate (errore di misura). Per consentire l'identificazione le varianze di  $\varepsilon$  sono vincolate ad essere uguali nel corso del tempo (si assume, cioè, che gli errori siano omoschedastici). Inoltre, come nei modelli *simplex*, i termini di errore non sono correlati. Nel modello strutturale i  $\beta$  rappresentano invece i coefficienti di regressione tra le differenti occasioni,  $t + 1$  e  $t$ . L'esame della stazionarietà, che come detto può essere testata imponendo dei vincoli di uguaglianza tra i coefficienti  $\beta$  nel tempo, è molto più realistica in questo modello rispetto al classico modello *simplex* (Jöreskog, 1978). Nello specifico, è più realistico assumere che le correlazioni tra coppie di variabili non cambi nel tempo solo dopo che le variabili siano state corrette per l'inattendibilità (questa condizione viene indicata con il termine «quasi-stazionarietà», vd. Kenny, 1975 e Kenny & Harackiewicz, 1979). Le zeta, infine, rappresentano i coefficienti di instabilità, o il cambiamento casuale che interviene in ogni occasione.

Un'interessante estensione dei modelli autoregressivi, siano essi *simplex* o *quasi simplex*, consiste nell'includere ulteriori variabili, testando così un disegno *cross-lagged* (Campbell & Kenny, 1999; Cook & Campbell, 1979; Duncan, 1969; Ferrer & McArdle, 2003). Un esempio di modello *cross-lagged* con due variabili osservate è presentato nella Fig. 4.

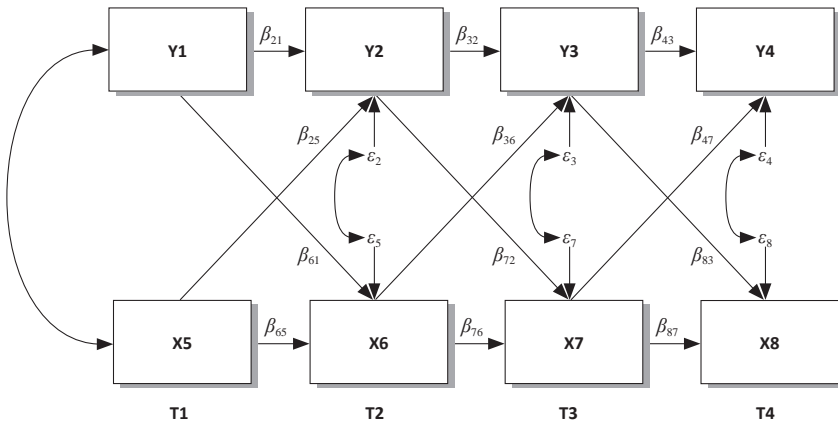


Fig. 4. – Rappresentazione diagrammatica di un modello *cross-lagged* su due variabili osservate.



7.

## L'ANALISI DI VARIABILI CATEGORIALI E NON NORMALI

*Michele Vecchione*

«Sapienza» Università di Roma

*Elena Natali*

«Sapienza» Università di Roma

*Roberta Fida*

«Sapienza» Università di Roma

doi: 10.7359/649-2013-vecc

SOMMARIO: 1. Introduzione – 2. L'analisi dei dati non-normali e categoriali – 2.1. Il metodo dei minimi quadrati ponderati (WLS) – 2.2. Il metodo robusto di Satorra e Bentler – 3. Un esempio di applicazione con Mplus – 4. Conclusioni – 5. Riferimenti bibliografici.

### 1. INTRODUZIONE

In questo capitolo verranno presentati i principali metodi analitici che consentono di applicare i modelli di equazioni strutturali a variabili non metriche, di natura ordinale o dicotomica, e a variabili che presentano distribuzioni non normali. Il tema verrà introdotto presentando le assunzioni sottostanti le tecniche classiche basate sul metodo di stima della massima verosimiglianza, facendo particolare riferimento alle condizioni necessarie all'applicazione delle tecniche «parametriche», relative al livello di misura e alle proprietà distributive delle variabili. Verranno evidenziate le conseguenze che derivano dalla violazione di tali assunzioni, e i principali rimedi proposti in letteratura e implementati nei software statistici LISREL, EQS ed Mplus. Verrà infine presentato un esempio di applicazione, tramite Mplus, di alcune delle principali procedure analitiche discusse.

---

Una delle fasi fondamentali nell'applicazione dei modelli di equazioni strutturali riguarda la verifica della bontà di adattamento (Bollen, 1989), ovvero del grado in cui il modello ipotizzato consente di riprodurre adeguatamente i dati osservati (a tale argomento è dedicato il capitolo scritto

da Palmira Faraci e Pasquale Musso in questo volume). Tecnicamente tale verifica si effettua confrontando la matrice di varianze e covarianze delle variabili osservate ( $\mathbf{S}$ ) con la matrice attesa o riprodotta in base alle stime campionarie dei parametri del modello,  $\mathbf{\Sigma}(\hat{\theta})$ . L'algoritmo classico per la stima dei parametri ( $\hat{\theta}$ ) si basa sul criterio della massima verosimiglianza (*Maximum Likelihood*, ML), che consiste nel determinare quali valori attribuire ai parametri «affinché la probabilità che  $\mathbf{S}$  derivi da  $\mathbf{\Sigma}(\hat{\theta})$  sia la più elevata possibile» (Corbetta, 1992, p. 92). Dal punto di vista matematico, tale obiettivo viene raggiunto minimizzando, nel processo iterativo di stima, la seguente funzione di *fit*:

$$F_{ML} = \log|\mathbf{\Sigma}(\hat{\theta})| + tr\{\mathbf{S}\mathbf{\Sigma}(\hat{\theta})^{-1}\} - \log|\mathbf{S}| - p \quad (1)$$

dove  $tr$  è la traccia della matrice argomento,  $||$  indica il determinante della matrice argomento, e  $p$  è il numero di variabili osservate, mentre  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{\Sigma}(\hat{\theta})$  sono state definite precedentemente.

Il metodo di stima della massima verosimiglianza rappresenta il criterio di *default* dei principali software statistici che consentono di implementare i modelli di equazioni strutturali, come ad esempio LISREL e PRELIS (Jöreskog & Sörbom, 1996a, 1996b), EQS (Bentler, 2005), ed Mplus (Muthén & Muthén, 1998-2010). Dall'algoritmo di calcolo della massima verosimiglianza è possibile ricavare un test statistico per valutare l'adeguatezza del modello. Se moltiplicato per il numero di soggetti ( $N$ ) meno 1, infatti, il valore minimo della funzione di *fit* che si raggiunge nel processo di stima dei parametri approssima la distribuzione del chi-quadrato:

$$\chi^2 \approx (N - 1)F_{ML} \quad (2)$$

con gradi di libertà pari a:

$$p(p - 1)/2 - t \quad (3)$$

dove  $p$  è il numero di variabili osservate e  $t$  è il numero di parametri stimati dal modello. Ciò consente di utilizzare il procedimento di verifica delle ipotesi per valutare se la discrepanza tra  $\mathbf{S}$  e  $\mathbf{\Sigma}(\hat{\theta})$  è dovuta esclusivamente all'errore campionario, o se le due matrici presentano una differenza sostanziale, che rappresenta l'esito di un'errata specificazione del modello. Nel test del chi quadrato, infatti, l'ipotesi nulla si riferisce alla perfetta corrispondenza tra le due matrici (ovvero alla non significatività statistica della loro differenza):

$$H_0: \mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}(\hat{\theta}) \quad (4)$$

Se il test del chi-quadrato conduce al rifiuto dell'ipotesi nulla, probabilmente il modello non è adeguato e andrebbe pertanto falsificato. Se invece l'evidenza empirica contro  $H_0$  non è sufficiente per rifiutare tale ipotesi, il modello può considerarsi adeguato.



Nonostante il test del chi-quadrato abbia rappresentato, e rappresenti tuttora, il primo e fondamentale criterio per valutare il *fit* del modello, esso è influenzato dalla violazione di alcune assunzioni sottostanti (Bollen, 1989; MacCallum, Browne & Sugawara, 1996). Innanzitutto si assume che l'ipotesi nulla  $\Sigma = \Sigma(\hat{\theta})$  sia vera nella popolazione (Lawley & Maxwell, 1971). In altri termini, si assume che nella popolazione vi sia un modello in grado di riprodurre perfettamente la matrice  $\Sigma$ . Nonostante questa assunzione sia necessaria, essa è spesso irrealistica. Per definizione, infatti, ogni modello teorico fornisce una visione semplificata della realtà (Byrne, 1998; Corbetta, 1992), e difficilmente consente di riprodurre perfettamente i dati empirici. Una seconda assunzione ha a che fare con la numerosità campionaria. Affinché la distribuzione  $(N - 1)F_{ML}$  sia asintoticamente corretta, efficiente e consistente, è necessario disporre di campioni particolarmente ampi (Bollen, 1989). Il minimo della funzione di *fit*,  $(N - 1)F_{ML}$ , infatti, approssima la distribuzione del chi quadrato solo quando  $N$  è molto elevato. Altre due assunzioni, su cui ci soffermeremo in questo capitolo, fanno riferimento rispettivamente alle proprietà distributive e al livello di misura delle variabili osservate. Il metodo di stima della massima verosimiglianza assume infatti la normalità multivariata nella popolazione delle  $p$  variabili incluse nel modello (Bentler, 1995). Tale condizione implica che: (a) tutte le distribuzioni univariate siano normali, (b) le distribuzioni bivariate (congiunte) di tutte le coppie di variabili siano normali e, (c) tutte le combinazioni lineari delle variabili siano normali (Barbaranelli, 2007; Kline, 2008). Preliminarmente alla stima dei parametri è pertanto necessario verificare il grado in cui tali condizioni sono rispettate nei dati empirici. L'esame delle proprietà distributive delle variabili può essere effettuato anche all'interno di alcuni software che consentono l'applicazione dei modelli di equazioni strutturali. In particolare, LISREL ed EQS forniscono gli indici univariati di asimmetria (*skewness*) e curtosi (che non sono invece disponibili in Mplus). L'asimmetria riflette il grado in cui la distribuzione è disposta simmetricamente attorno ai valori di tendenza centrale. L'indice di asimmetria assume un valore pari a zero quando la distribuzione è perfettamente simmetrica. Un'asimmetria positiva indica che i punteggi estremi che si collocano nella coda sinistra della curva (che presentano quindi valori inferiori alla media) sono più frequenti di quelli che caratterizzano la coda destra (superiori alla media). Valori negativi dell'indice di asimmetria caratterizzano la situazione opposta. La curtosi (dal greco *kurtos*, curvo) riflette il grado in cui i punteggi sono distribuiti nelle code piuttosto che nelle zone centrali della distribuzione. Le distribuzioni normali sono definite *mesocurtiche* (dal greco *mesos*, intermedio). L'indice di curtosi in tali distribuzioni è pari a 3. Nella maggior parte dei software statistici, tuttavia, l'indice viene

corretto sottraendo 3 dalla sua stima, affinché possa essere interpretato in maniera analoga all'indice di asimmetria. In seguito a tale correzione, infatti, il valore zero indica una distribuzione normale (nelle prossime pagine faremo riferimento alla versione «corretta» dell'indice, che è anche quella più diffusamente utilizzata). Le distribuzioni *platicurtiche* sono distribuzioni in cui i valori estremi (positivi e negativi) sono più frequenti rispetto a quanto si verifica nelle distribuzioni *mesocurtiche*. Tale condizione determina distribuzioni più piatte e code più ampie rispetto alla normale (il termine *platicurtico* deriva dal greco *platis*, largo, con riferimento allo spessore delle code). L'indice di curtosi assume in questi casi un valore di segno negativo. Le distribuzioni *leptocurtiche* (dal greco *lepto*, sottile) sono distribuzioni in cui i valori estremi sono meno frequenti rispetto a quanto si verifica nelle distribuzioni mesocurtiche (la maggior parte dei valori, in questo tipo di distribuzioni, si dispone nelle zone centrali). Tale condizione determina distribuzioni più appuntite e code più sottili rispetto alla normale. L'indice di curtosi assume in questi casi un valore di segno positivo. Quando sia l'asimmetria che la curtosi sono prossime a zero, la variabile si distribuisce normalmente. Oltre ai valori di asimmetria e curtosi, in LISREL ed EQS vengono forniti dei test statistici che consentono di valutare l'ipotesi nulla che i due indici siano pari a zero nella popolazione, ovvero che la distribuzione univariata sia perfettamente normale. Questi test, tuttavia, così come altri test analoghi proposti per valutare la normalità univariata, quali ad esempio i test di Kolmogorov-Smirnoff e di Shapiro-Wilk, vengono utilizzati raramente nella pratica di ricerca, poiché sono fortemente dipendenti dalla numerosità campionaria (Barbaranelli, 2007). Con campioni molto ampi, infatti, anche deviazioni marginali dalla condizione di normalità possono condurre al rifiuto dell'ipotesi nulla. Questi test, inoltre, valutano una condizione particolarmente stringente, che raramente viene soddisfatta nelle applicazioni pratiche, ovvero la perfetta corrispondenza tra la distribuzione normale e la distribuzione osservata empiricamente. Tale corrispondenza rappresenta più che altro una condizione ideale, che fornisce un punto di riferimento rispetto al quale valutare il grado in cui i dati si discostano dalla normalità. Il metodo della massima verosimiglianza, infatti, fornisce risultati sostanzialmente non distorti se asimmetria e curtosi delle variabili osservate sono contenute (Muthén & Kaplan, 1985). Come regola pratica, la violazione dell'assunzione di normalità univariata si considera problematica solo quando i valori di asimmetria e/o di curtosi non sono compresi tra  $-1$  e  $+1$  (Muthén & Kaplan, 1985; Tabachnick & Fidell, 2007).

Altre procedure consentono di valutare la normalità multivariata delle  $p$  variabili analizzate. È opportuno infatti ribadire che la presenza di distribuzioni normali univariate rappresenta una condizione necessaria ma non suffi-

ciente affinché anche la distribuzione multivariata sia normale. Se le distribuzioni univariate non sono normali, anche la distribuzione multivariata è non normale, ma non sempre è vero il contrario. La distribuzione multivariata, infatti, può essere non-normale anche quando tutte le singole variabili sono distribuite normalmente (nonostante tale situazione si verifichi di rado). Per valutare formalmente l'assunzione di normalità multivariata è possibile richiedere in LISREL, EQS ed Mplus i test di asimmetria e di curtosi multivariata di Mardia (1970, 1974, 1985), che rappresentano una generalizzazione al caso multivariato degli indici univariati descritti in precedenza.

Un'altra assunzione alla base dei metodi di stima della massima verosimiglianza fa riferimento, come anticipato, alla scala di misura delle variabili osservate. In particolare si assume che le variabili siano misurate su scala a intervalli o a rapporti equivalenti (in altri termini, si assume che l'unità di misura sia costante attraverso la scala, ovvero che le categorie di risposta siano equidistanti). Occorre tuttavia notare che l'approccio prevalente consiste nell'utilizzare le stime della massima verosimiglianza anche quando i dati sono di natura ordinale, come accade ad esempio quando si usano scale tipo Likert. Secondo alcuni autori (es. Comrey & Lee, 1992), infatti, le conseguenze che la violazione di tale assunzione comporta sono trascurabili se le variabili: (a) sono distribuite in modo approssimativamente normale e (b) dispongono di un numero sufficiente di categorie di risposta. Rispetto a quest'ultimo aspetto si registra, nella letteratura scientifica, una certa divergenza di opinioni. Secondo alcuni autori le variabili devono possedere almeno cinque categorie di risposta (es. Bollen & Barb, 1981; Schumacker e Beyerlein, 2000); altri invece considerano accettabile la presenza di almeno quattro categorie (es. Bentler & Chou, 1987); altri ancora, infine, fissano a tre il criterio minimo (es. Green, Akey, Fleming, Hershberger & Marquis, 1997). In queste condizioni i metodi sviluppati per l'analisi delle variabili continue (come la massima verosimiglianza) sembrano fornire risultati sostanzialmente non distorti. Altri autori (es. Jöreskog & Sörbom, 1996a) ritengono invece che le scale tipo Likert vadano considerate in ogni caso come ordinali, e analizzate di conseguenza (tale assunzione è implicita in PRELIS, dove le variabili osservate sono definite come variabili ordinali nell'impostazione di *default* del software). Quando le variabili da analizzare sono misurate su scala nominale, ovvero presentano una serie di categorie qualitative non ordinabili (ad esempio la regione di residenza), i modelli di equazioni strutturali non sono applicabili in alcun modo. Un'eccezione è rappresentata dalle variabili dicotomiche, che rappresentano un caso di variabile categoriale ordinabile, con due sole categorie (ad esempio Vero/Falso, Sì/No), per il quale è legittima l'applicazione dei modelli di equazioni strutturali (per un approfondimento si rimanda a Barbaranelli & Natali, 2005).



8.

# LE TECNICHE DI SIMULAZIONE MONTE CARLO

*Massimiliano Pastore*

Università degli Studi di Padova

doi: 10.7359/649-2013-past

SOMMARIO: 1. Introduzione generale – 2. Introduzione alle simulazioni – 2.1. Generazione di numeri casuali – 2.2. Simulazione di un modello di regressione – 2.3. Generazione di dati con una determinata struttura di covarianza – 3. Simulazioni di modelli di misura – 3.1. Modello a fattore singolo – 3.2. Modello a due fattori – 4. Simulazioni con modelli strutturali completi – 4.1. Esempio 1 – 4.2. Esempio 2 – 5. Simulazioni con dati discreti – 5.1. Generazione di due variabili discrete con correlazione definita – 5.2. Modello a fattore singolo – 5.3. Caso dicotomico – 6. Un esempio di esperimento Monte Carlo – 6.1. Analisi dei risultati – 7. Conclusioni – 8. Riferimenti bibliografici.

## 1. INTRODUZIONE GENERALE

I metodi Monte Carlo riguardano l'uso delle tecniche di campionamento casuale e della simulazione al computer per ottenere una soluzione approssimata ad un problema matematico o fisico (Merriam-Webster, 1994, pp. 754-755).

In altri termini, li possiamo considerare una famiglia di metodi di simulazione tramite i quali è possibile riprodurre e studiare dei sistemi empirici in forma controllata. Si tratta, in pratica, di processi tramite i quali vengono generati dati sulla base di un modello specificato a priori e possiamo dire che ormai sono diventati parte integrante delle tecniche standard utilizzate nei metodi statistici (Robert & Casella, 2004).

Alla base dei metodi Monte Carlo vi è la generazione di variabili casuali. A ciascuna variabile da generare lo sperimentatore assegna delle proprietà relative alle caratteristiche distribuzionali (es. media, varianza, grado di asimmetria), alla loro relazione reciproca (es. correlazione), alla quantità di errore presente nella loro misurazione. Tali proprietà definiranno pertanto la popolazione di riferimento dalla quale estrarre a caso un certo numero di

campioni con dimensione definita (che può essere fissa oppure variabile in funzione delle esigenze di studio) sui quali verranno calcolate le statistiche oggetto di studio. Al termine della simulazione lo sperimentatore potrà disporre delle distribuzioni campionarie delle statistiche e da queste dedurre il comportamento in funzione delle proprietà definite nella popolazione.

Le simulazioni Monte Carlo sono molto usate nella letteratura legata alle equazioni strutturali (Paxton, Curran, Bollen, Kirby & Chen, 2001; Fan & Fan, 2005) e permettono di studiare varie tipologie di problemi ad esse connessi; ad esempio il problema dei metodi di stima dei parametri (vd. ad es. Flora & Curran, 2004; Ximénez, 2006) con gli annessi problemi legati alla convergenza dell'algoritmo di stima (Boomsma, 1985), la valutazione dell'adattamento e degli indici di *fit* (Gerbing & Anderson, 1993; Hu & Bentler, 1999; Sivo, Fan, Witta & Willse, 2006), la prestazione delle procedure di stima e degli indici di adattamento in condizioni non ottimali (ad es. errata specificazione del modello o distribuzioni non normali nei dati; Fan, Thompson & Wang, 1999; Fan & Sivo, 2005, 2007; Hu & Bentler, 1998; Olsson, Foss, Troye & Howell, 2000), i problemi connessi con la presenza di dati mancanti (Arbuckle, 1996; Davey, Savla & Luo, 2005; Enders & Bandalos, 2001; Muthén, Kaplan & Hollis, 1987; Schafer & Graham, 2002), la stima dell'affidabilità (Green & Yang, 2009; Yang & Green, 2010).

In questo capitolo vogliamo introdurre i concetti alla base delle simulazioni Monte Carlo a partire dalla simulazione di un semplice modello di regressione lineare fino alla generazione di insiemi di variabili sulla base di un modello strutturale. Da ultimo presenteremo un esempio molto semplice di come impostare un esperimento Monte Carlo. I vari algoritmi saranno presentati in dettaglio facendo riferimento all'ambiente R (vd. R Development Core Team, 2010). R è un ambiente statistico *open source* che negli ultimi anni si sta affermando in maniera consistente (Fox, 2009; Muenchen, 2010) al punto da costituire un vero e proprio punto di riferimento per l'analisi statistica e non solo. Dato che non è obiettivo di questo volume la presentazione di R, gli interessati a maggiori approfondimenti possono fare riferimento alla vasta letteratura disponibile in proposito (vd. ad es. Dalgaard, 2002; Iacus & Masarotto, 2003; Rizzo, 2008).

