Capitolo 1

Introduzione

1.1 Insiemi e funzioni

Esercizio 1.1.1 Dimostrare le seguenti identità:

1. $A \cap B = B \cap A$ (commutatività),
2. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associatività),
3. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributività di $\cap$ su $\cup$),
4. $-(A \cap B) = -A \cup -B$ (legge di De Morgan).

Si dimostri che sostituendo $\cap$ con $\cup$ e $\cup$ con $\cap$ si ottengono altrettante asserzioni valide.

1. In generale quando si vuole dimostrare che due insiemi Z e W sono uguali basta dimostrare, per il principio di estensionalità, che hanno gli stessi elementi ossia che per ogni x, $x \in Z$ sse $x \in W$. Se sostituiamo il sse con la sua definizione otteniamo: per ogni x ((se $x \in Z$ allora $x \in W$) e (se $x \in W$ allora $x \in Z$)) che a sua volta equivale a: per ogni x (se $x \in Z$ allora $x \in W$) e per ogni x (se $x \in W$ allora $x \in Z$). (Il quantificatore "per ogni" si può distribuire e raccogliere sul connettivo "e".) Infine, ricordando la definizione dell'inclusione tra insiemi, possiamo concludere che per dimostrare $Z = W$ è sufficiente dimostrare $Z \subseteq W$ e $W \subseteq Z$. (Quindi $Z \subseteq W$ e $W \subseteq Z$ è condizione *sufficiente* per avere $Z = Z$. Tale condizione è anche *necessaria*? Ossia $Z = W$ implica $Z \subseteq W$ e $W \subseteq Z$?) Nel nostro caso ciò che dobbiamo dimostrare è: i) $A \cap B \subseteq B \cap A$ e ii) $B \cap A \subseteq A \cap B$. Dimostriamo la i): se $x \in A \cap B$ allora $x \in A$ e $x \in B$, ma allora vale anche $x \in B$ e $x \in A$ e quindi $x \in B \cap A$. La ii) si dimostra in modo analogo. (Quindi la commutatività dell'intersezione tra insiemi dipende dalla commutatività della congiunzione tra proposizioni.)

2. La dimostrazione è simile alla precedente: l'associatività dell'intersezione tra insiemi dipende dall'associatività della congiunzione tra proposizioni.

3. Dimostriamo $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Se $x \in A \cap (B \cup C)$ allora $x \in A$ e $x \in B \cup C$ e quindi $x \in A$ e ($x \in B$ o $x \in C$). Se $x \in B$ allora vale $x \in A$ e $x \in B$ e quindi $x \in A \cap B$. Se $x \in C$ allora vale $x \in A$ e $x \in C$ e quindi $x \in A \cap C$. In conclusione $x \in A \cap B$ oppure $x \in A \cap C$ e quindi $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Dimostriamo che $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. Se $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ allora $x \in A \cap B$ oppure $x \in A \cap C$. Caso 1), $x \in A \cap B$: allora $x \in A$ e $x \in B$, ma allora x appartiene anche a $B \cup C$ e quindi $x \in A \cap (B \cup C)$. Caso 2), $x \in A \cap C$: allora $x \in A$ e $x \in C$, ma allora x appartiene anche a $B \cup C$ e quindi $x \in A \cap (B \cup C)$. In entrambi i casi (e non ci sono altri casi, per la nostra ipotesi) x appartiene a $A \cap (B \cup C)$.

4. Dimostriamo $-(A \cap B) \subseteq -A \cup -B$. Se $x \in -(A \cap B)$ allora $x \notin A \cap B$. Ora $A \cap B$ è l'insieme $\{y : y \in A \text{ e } y \in B\}$. Se x non appartiene a tale insieme allora non vale ($x \in A$ e $x \in B$) e quindi o $x \notin A$ oppure $x \notin B$. (Ciò significa che almeno una di queste due alternative deve valere, eventualmente anche entrambe, mentre è impossibile che nessuna delle due sia vera, altrimenti x apparterrebbe a $A \cap B$.) Allora $x \in -A$ oppure $x \in -B$ e quindi $x \in -A \cup -B$. La dimostrazione dell'altra inclusione è analoga.

Esercizio 1.1.2 Si dimostrino le asserzioni seguenti:

1. $A \subseteq B$ sse $A \cap B = A$,
2. $A \subseteq B$ sse $A \cup B = B$,
3. $A \subseteq B$ sse $-B \subseteq -A$,
4. $(A - B) - C = A - (B \cup C)$,
5. $A \subseteq B$ implica $\bigcup A \subseteq \bigcup B$, $\bigcap B \subseteq \bigcap A$ e $P(A) \subseteq P(B)$.

1. Dobbiamo dimostrare un'equivalenza, ossia la congiunzione di due implicazioni: ($A \subseteq B$ implica $A \cap B = A$) e ($A \cap B = A$ implica $A \subseteq B$). Dimostriamo la prima implicazione e a tale scopo assumiamo $A \subseteq B$ come ipotesi (che chiameremo ipotesi 1) e facciamo vedere che sotto questa ipotesi $A \cap B = A$. Dobbiamo quindi dimostrare: i) $A \cap B \subseteq A$ e ii) $A \subseteq A \cap B$. Per quanto riguarda la i) dobbiamo dimostrare che per ogni x, se $x \in A \cap B$ allora $x \in A$. Ciò è evidente dato che se x appartiene a $A \cap B$ allora x appartiene ad A. Per quanto riguarda la ii) dobbiamo dimostrare che se $x \in A$ allora $x \in A \cap B$. Abbiamo ora due ipotesi: l'ipotesi 1 di carattere generale e l'assunzione $x \in A$, che chiameremo ipotesi 2, di carattere locale. Dall'ipotesi 2 segue $x \in A$, dall'ipotesi 1 sappiamo che $A \subseteq B$, quindi $x \in B$. (Si osservi che all'ipotesi 1 avremmo potuto fare ricorso anche nella dimostrazione di i), ma non è stato necessario. L'ipotesi 2, invece, può essere invocata solo per la dimostrazione di ii) e non per quella di i).) Dimostriamo ora la seconda implicazione: mostriamo che dall'ipotesi $A \cap B = A$ deriva $A \subseteq B$. A tale scopo basta mostrare che per ogni x, se $x \in A$ allora $x \in B$. Infatti se $x \in A$ allora $x \in A \cap B$, per ipotesi, e quindi $x \in B$.

2. La dimostrazione è analoga.

3. Dimostriamo la prima implicazione. Assumiamo $A \subseteq B$ (ipotesi 1) e mostriamo che $-B \subseteq -A$. Supponiamo dunque $x \in -B$ (ipotesi 2) e mostriamo che $x \notin A$ da cui segue $x \in -A$. Per dimostrare che $x \notin A$ è sufficiente dimostrare che da $x \in A$ (ipotesi 3) segue una contraddizione. Infatti da $x \in A$ per l'ipotesi 1 segue $x \in B$, mentre dall'ipotesi 2 segue $x \notin B$. Dimostriamo la seconda implicazione. Assumiamo $-B \subseteq -A$ (ipotesi 1) e mostriamo che $A \subseteq B$. Supponiamo dunque $x \in A$ (ipotesi 2) e mostriamo che $x \in B$. A tale scopo è sufficiente dimostrare che da $x \notin B$ (ipotesi 3) segue una contraddizione. Infatti se $x \notin B$ allora $x \in -B$, ma allora $x \in -A$ per l'ipotesi 1, da cui $x \notin A$ che contraddice l'ipotesi 2.

4. $x \in (A - B) - C$ sse $x \in A - B$ e $x \notin C$ sse $x \in A$ e $x \notin B$ e $x \notin C$. Ma $x \notin B$ e $x \notin C$ sse $x \in -B \cap -C$ sse $x \in -(B \cup C)$, per la legge di de Morgan. Allora $x \in A$ e $x \notin B$ e $x \notin C$ sse $x \in A$ e $x \in -(B \cup C)$ sse $x \in A - (B \cup C)$.

5. Assumiamo $A \subseteq B$ (ipotesi 1). Dimostriamo che $\bigcup A \subseteq \bigcup B$. Supponiamo quindi che $x \in \bigcup A$, allora esiste un $y \in A$ tale che $x \in y$. Per l'ipotesi 1 $y \in B$ e quindi $x \in \bigcup B$. Dimostriamo che $\bigcap B \subseteq \bigcap A$. Supponiamo quindi che $x \in \bigcap B$, allora per ogni $y \in B$ vale $x \in y$ (ipotesi 2). Sia ora z un elemento qualsiasi di A, per l'ipotesi 1 $z \in B$ e quindi $x \in z$ per l'ipotesi 2. Poiché z era un elemento qualsiasi di A, x appartiene a ogni elemento di A e quindi $x \in \bigcap A$. Dimostriamo che $P(A) \subseteq P(B)$. Se $x \in P(A)$ allora $x \subseteq A$ e quindi, per l'ipotesi 1 e la transitività dell'inclusione, $x \subseteq B$. Ma allora $x \in P(B)$.

Esercizio 1.1.3 Se $< a, b >= \{\{a\}, \{a, b\}\}$, si dimostri che $< a, b >=< c, d >$ implica $a = c$ e $b = d$.

Innanzitutto dimostriamo il lemma seguente: $\{x, y\} = \{x, z\}$ implica $y = z$. Poiché gli insiemi $\{x, y\}$ e $\{x, z\}$ sono uguali, devono contenere gli stessi elementi. Dato che $z \in \{x, z\}$, varrà anche $z \in \{x, y\}$ e quindi $z = x$ o $z = y$. Se $z = y$ allora abbiamo ottenuto il risultato voluto. Se $z = x$ allora $\{x, y\} = \{x, x\} = \{x\}$. Quindi da $y \in \{x, y\}$ segue $y \in \{x\}$ ossia $y = x$. Dall'ipotesi segue allora $z = y$.

Se $< a, b >=< c, d >$ allora $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$. Da questa uguaglianza segue $\{a\} = \{c\}$ o $\{a\} = \{c, d\}$. Caso 1, $\{a\} = \{c\}$, allora $a = c$. Quindi l'uguaglianza iniziale diventa

$$\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, d\}\}$$

da cui si ottiene, mediante il lemma, prima $\{a, b\} = \{a, d\}$ e infine $b = d$. Caso 2, $\{a\} = \{c, d\}$. Allora $c \in \{a\}$ e quindi $c = a$. Procedendo come sopra si ottiene $b = d$.

Esercizio 1.1.4 Supponiamo che f e g siano funzioni. Si dimostri che: 1) $f \cap g$ è una funzione, 2) $f \cup g$ è una funzione sse $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in Dom(f) \cap Dom(g)$.

1. Per dimostrare che $f \cap g$ è una funzione occorre dimostrare che è un insieme di coppie ordinate che soddisfa la condizione seguente: se $< x, y >$ e

$< x, z >$ appartengono a $f \cap g$ allora $y = z$. Poiché f e g sono insiemi di coppie ordinate, anche $f \cap g$ lo è. Se $< x, y >$ e $< x, z >$ appartengano a $f \cap g$ allora appartengono a f. Poiché f è una funzione, deve essere $y = z$. Se $f \cap g = \emptyset$ basta osservare che anche $\emptyset$ è una funzione poiché $\emptyset$ è un insieme (vuoto) di coppie ordinate e inoltre se $< x, y >$ e $< x, z >$ appartengono a $\emptyset$ allora $y = z$. Infatti quest'ultima implicazione è vera in quanto il suo antecedente "se $< x, y >$ e $< x, z >$ appartengono a $\emptyset$" è sempre falso

2. Innanzitutto osserviamo che in generale $f \cup g$ non è una funzione. Infatti se $f =< x, y >$ e $g =< x, z >$, con $y \neq z$, allora sia f che g sono funzioni, ma $f \cup g$ non lo è. Supponiamo ora che f e g siano tali che $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in Dom(f) \cap Dom(g)$. Dimostriamo che in questo caso $f \cup g$ è una funzione. Evidentemente $f \cup g$ è un insieme di coppie ordinate, dato che tali sono f e g. Supponiamo ora che $< x, y >$ e $< x, z >$ appartengano a $f \cup g$ e dimostriamo che $y = z$. Poiché x appartiene al dominio di $f \cup g$, x deve appartenere al dominio di f o al dominio di g o a entrambi. Se x appartiene al dominio di f e non appartiene a quello di g, allora le coppie $< x, y >$ e $< x, z >$ appartengono entrambe a f e poiché f è una funzione dobbiamo avere $y = z$. La stessa conclusione si ottiene se x appartiene al dominio di g e non appartiene a quello di f. Infine se x appartiene sia al dominio di f che a quello di g allora $x \in Dom(f) \cap Dom(g)$ e quindi, per ipotesi, $f(x) = g(x)$. Ma $y = g(x)$ e $z = g(x)$.

Dimostriamo ora che se $f \cup g$ è una funzione allora $f(x) = g(x)$ per ogni $x \in Dom(f) \cap Dom(g)$. Supponiamo che x appartenga a $Dom(f) \cap Dom(g)$, allora esistono y e z tali che $< x, y > \in f$ e $< x, z > \in g$. Allora $f \cup g$ contiene sia $< x, y >$ che $< x, z >$ e poiché $f \cup g$ è una funzione deve essere $y = z$.

Esercizio 1.1.5 Sia A un insieme di funzioni tale che, per ogni f, $g \in A$, vale $f \subseteq g$ oppure $g \subseteq f$. Si dimostri che $\bigcup A$ è una funzione.

Supponiamo che $< x, y >$ e $< x, z >$ appartengano a $\bigcup A$, allora esistono due funzioni f , $g \in A$ tali che $< x, y >$ appartiene a f e $< x, z >$ appartiene a g. Per ipotesi $f \subseteq g$ oppure $g \subseteq f$. Nel primo caso sia $< x, y >$ che $< x, z >$ appartengono a g e poiché quest'ultima è una funzione avremo $y = z$. Nello stesso modo si procede se $g \subseteq f$.

Esercizio 1.1.6 Si dimostri che

1. $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$ e $f[\bigcup A] = \bigcup\{f[a] : a \in A\}$.
2. $f[A \cap B] \subseteq f[A] \cap f[B]$ e $f[\bigcap A] \subseteq \bigcap\{f[a] : a \in A\}$.
3. Se f è iniettiva, $f[A - B] = f[A] - f[B]$.

1. Se x appartiene a $f[A \cup B]$ allora esiste un $y \in A \cup B$ tale che $f(y) = x$: se $y \in A$ allora $x \in f[A]$ mentre se $y \in B$ allora $x \in f[B]$. In entrambi i casi x appartiene a $f[A] \cup f[B]$. Viceversa, se x appartiene a $f[A] \cup f[B]$ allora $x \in f[A]$ oppure $x \in f[B]$: nel primo caso esiste un $y \in A$ tale che $x = f(y)$, nel secondo caso esiste un $y \in B$ tale che $x = f(y)$, in entrambi i casi $x \in f[A \cup B]$.

Se $x \in f[\bigcup A]$ allora esistono $a \in A$ e $y \in a$ tali che $f(y) = x$. Quindi $x \in f[a]$ e perciò x appartiene a $\bigcup\{f[a] : a \in A\}$. Viceversa, se x appartiene a $\bigcup\{f[a] : a \in A\}$ allora esiste un $a \in A$ tale che $x \in f[a]$. Ma allora esiste un $y \in a$ tale che $x = f(y)$: quindi x appartiene a $f[\bigcup A]$.

2. Se x appartiene a $f[A \cap B]$ allora esiste un $y \in A \cap B$ tale che $f(y) = x$, allora $x \in f[A]$ e $x \in f[B]$ e quindi x appartiene a $f[A] \cap f[B]$. (Non vale il viceversa, poiché se x appartiene a $f[A] \cap f[B]$ può accadere che sia $A \cap B = \emptyset$.)

Se x appartiene a $f[\bigcap A]$ allora esiste un $y \in \bigcap A$ tale che $x = f(y)$. Poiché per ogni $a \in A$ abbiamo $y \in a$, abbiamo $x \in f[a]$ per ogni $a \in A$: quindi x appartiene a $\bigcap\{f[a] : a \in A\}$

3. Se x appartiene a $f[A - B]$ allora esiste un $y \in A - B$ tale che $x = f(y)$. Da $y \in A$ ricaviamo $x \in f[A]$ e da $y \notin B$ ricaviamo $x \notin f[B]$. In conclusione, x appartiene a $f[A] - f[B]$. Supponiamo or che x appartenga a $f[A] - f[B]$. Da $x \in f[A]$ ricaviamo $x = f(y)$ per qualche $y \in A$. Poiché f è iniettiva, x è l'immagine di un solo elemento, e poiché $x \notin f[B]$ abbiamo $y \notin B$. Ma allora $y \in A - B$ e quindi x appartiene $f[A - B]$.

Esercizio 1.1.7 Teorema del punto fisso [Knaster-Tarski]. Sia $f : P(A) \to P(A)$. Diremo che f è monotona se, per ogni X, $Y \subseteq A$, $X \subseteq Y$ implica $f(X) \subseteq f(Y)$, e diremo che $K \subseteq A$ è un punto fisso di f se $f(K) = K$. Ogni funzione monotona ha un minimo punto fisso.

Sia $B = \{X : f(X) \subseteq X\}$ e sia $K = \bigcap B$: dimostreremo che $f(K) = K$. Dimostriamo che $f(K) \subseteq K$. Sia X un elemento di B, vale allora $K \subseteq X$. Poiché f è monotona, $f(K) \subseteq f(X)$. Poiché $X \in B$, $f(X) \subseteq X$. Quindi $f(K) \subseteq X$. Poiché X era un elemento qualsiasi di B, abbiamo dimostrato che $f(K)$ è incluso in ogni elemento di B e quindi $f(K) \subseteq K$. Dimostriamo che $K \subseteq f(K)$. Da quanto abbiamo dimostrato sopra, per monotonia otteniamo $f(f(K)) \subseteq f(K)$ e quindi $f(K)$ è un elemento di B. Ma allora $K \subseteq f(K)$.

Abbiamo dimostrato che K è un punto fisso di f, dimostriamo ora che K è il minimo tra i punti fissi di f. Sia H un altro punto fisso di f, allora $f(H) = H$, ma allora $H \in B$ e quindi $K \subseteq H$.

1.2 Successioni

1.3 Funzioni e relazioni n-arie

1.4 Relazioni d'ordine e di equivalenza

Esercizio 1.4.1 Se per ogni $a \in A$ vale non-$R(a, a)$, diciamo che R è irriflessiva. Definiamo ordine parziale stretto una relazione R che sia irriflessiva e transitiva. Si dimostri che esiste una biiezione tra gli ordini parziali su A e gli ordini parziali stretti su A.

Ogni ordine parziale R su A è una relazione riflessiva e quindi include l'insieme diagonale Δ_A. Sia $R' = R - \Delta_A$. Dimostriamo che R' è un ordine parziale stretto su A. Evidentemente R' è irriflessiva. Dimostriamo che è transitiva. Supponiamo che (x,y) e (y,z) appartengano a R'. Allora $x \neq y$ e $y \neq z$. Sia (x,y) che (y,z) appartengono a R e quindi anche (x,z) appartiene a R. Per dimostrare che (x,z) appartiene anche a R' basta dimostrare che $x \neq z$. Se fosse $x = z$ allora sia (x,y) che (y,x) apparterrebbero a R e quindi varrebbe $x = y$, contro l'ipotesi.

Se R e Q sono due ordini parziali su A e $R \neq Q$ allora $R' \neq Q'$. (Se fosse $R' = Q'$ allora avremmo anche $R' \cup \Delta_A = Q' \cup \Delta_A$ ossia $R = Q$.)

Abbiamo cosı̀ dimostrato che esiste una funzione iniettiva ϕ che associa ad ogni ordine parziale R su A un ordine parziale stretto $\phi(R) = R'$ su A. Mostriamo ora che per ogni ordine parziale stretto Q su A esiste un ordine parziale R su A tale che $\phi(R) = Q$. Basta porre $R = Q \cup \Delta_A$. Evidentemente R è una relazione riflessiva su A. Mostriamo che è antisimmetrica. Supponiamo che (x,y) e (y,x) appartengano a R: se fosse $x \neq y$ allora sia (x,y) che (y,x) sarebbero elementi di Q. Ma Q è transitiva, allora (x,x) appartiene a R, il che è assurdo poiché R è irriflessiva. Mostriamo infine che è transitiva. Supponiamo che (x,y) e (y,z) appartengano a R. Se $x \neq y$ e $y \neq z$ allora entrambe le coppie appartengono a Q e quindi anche (x,z) appartiene a Q, poiché è transitiva. Ma allora (x,z) appartiene a R. Se $x = y$ allora (x,z) appartiene a R, e lo stesso accade se $y = z$.

Esercizio 1.4.2 Supponiamo che la relazione 2-aria R su A sia simmetrica e transitiva. Allora da $R(x,y)$ e da $R(y,x)$ si ricava $R(x,x)$. Si può concludere che ogni relazione simmetrica e transitiva è anche riflessiva?

Si consideri $A = \{a,b,c\}$ e la relazione $\{(a,b),(b,a),(a,a),(b,b)\}$ definita su A. Si vede immediatamente che R è simmetrica, transitiva ma non riflessiva.

Esercizio 1.4.3 Questo esercizio mostra un metodo di uso comune per ottenere ordini parziali da relazioni transitive. Supponiamo che R sia una relazione su A transitiva. Ogni relazione R si può facilmente rendere riflessiva aggiungendo tutte le coppie di oggetti identici, ma non possiamo renderla antisimmetrica, se già non lo è, aggiungendo coppie ordinate. Mostreremo però che a una relazione transitiva e riflessiva si può associare in modo naturale un ordine parziale su un opportuno insieme quoziente.

1. Si dimostri che la relazione $x \sim y$ sse $R(x,y)$ e $R(y,x)$ è una relazione di equivalenza su A.

2. Si dimostri che la relazione $\leq$ definita su $A/\sim$ ponendo $[x] \leq [y]$ sse $R(x,y)$ è un ordine parziale su $A/\sim$.

3. Si dimostri che la relazione R su A è estendibile a una relazione $\leq$ su $A/\sim$ tale che $[x] \leq [y]$ sse $R(x,y)$.

4. Si dimostri che $\leq$ è un ordine parziale su $A/\sim$.

1. La relazione $\sim$ è riflessiva perché per ipotesi R è riflessiva. La relazione $\sim$ è simmetrica per definizione. La relazione $\sim$ è transitiva perché R è transitiva.

2. La relazione $\leq$ è riflessiva perché R è riflessiva. La relazione $\leq$ è antisimmetrica: se vale $[x] \leq [y]$ e $[y] \leq [x]$ allora vale $R(x, y)$ e $R(y, x)$. Ma allora $x \sim y$ e quindi $[x] = [y]$.

3. Perché la definizione di $\leq$ sulle classi di equivalenza che compongono $A/\sim$ sia corretta, occorre verificare che non dipende dalla scelta del rappresentante della classe. Vale a dire che se x' e y' sono altri rappresentanti rispettivamente di $[x]$ e di $[y]$, ossia $x \sim x'$ e $y \sim y'$, allora $R(x, y)$ sse $R(x', y')$ e quindi $[x] \leq [y]$ sse $[x'] \leq [y']$. Supponiamo quindi che valga $R(x, y)$, allora da $y \sim y'$ scende $R(y, y')$ e quindi $R(x, y')$ per la transitività di R. Da $x \sim x'$ scende $R(x', x)$ e quindi $R(x', y')$ per la transitività di R. In modo analogo si dimostra che $R(x', y')$ implica $R(x, y)$.

1.5 Numeri naturali e induzione

Esercizio 1.5.1 Si dimostrino per induzione le seguenti asserzioni:

$$\begin{aligned} 1 + 3 + ... + (2n + 1) &= (n + 1)^2 \\ 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n &= 2^{n+1} - 1 \\ \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + ... + \frac{1}{n \cdot (n + 1)} &= \frac{n}{n + 1} \end{aligned}$$

1. Quando $n = 0$ abbiamo $(2 \cdot 0) + 1 = (0 \cdot 1)^2$. Assumiamo ora che l'uguaglianza valga per k, ossia che per ipotesi induttiva valga

$$1 + 3 + ... + (2k + 1) = (k + 1)^2$$

e dimostriamo che l'uguaglianza è vera per $k + 1$, ossia che

$$1 + 3 + ... + (2k + 1) + (2(k + 1) + 1) = ((k + 1) + 1)^2.$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} 1 + 3 + ... + (2(k + 1) + 1) &= (k + 1)^2 + (2(k + 1) + 1) \\ &= k^2 + 4k + 4 \\ &= (k + 2)^2. \end{aligned}$$

2. Quando $n = 0$ abbiamo $2^0 = 2^{0+1} - 1$. Assumiamo ora che l'uguaglianza valga per k ossia che per ipotesi induttiva

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

e dimostriamo che vale per $k+1$, ossia che

$$2^0 + 2^1 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1+1} - 1.$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} 2^0 + 2^1 + \ldots + 2^{k+1} &= (2^{k+1} - 1) + 2^{k+1} \\ &= 2 \cdot 2^{k+1} - 1 \\ &= 2^{k+2} - 1. \end{aligned}$$

3. Quando $n = 0$ abbiamo

$$\frac{1}{0 \cdot (0+1)} = \frac{0}{0+1}.$$

Assumiamo ora che l'uguaglianza valga per k ossia che per ipotesi induttiva

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{k}{k+1}$$

e dimostriamo che vale per $k+1$, ossia che

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{k \cdot (k+1)} + \frac{1}{(k+1) \cdot ((k+1)+1)} = \frac{k+1}{k+1+1}.$$

Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1) \cdot (k+2)} &= \frac{k \cdot (k+2) + 1}{(k+1) \cdot (k+2)} \\ &= \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1) \cdot (k+2)} \\ &= \frac{(k+1)^2}{(k+1) \cdot (k+2)} \\ &= \frac{k+1}{k+2}. \end{aligned}$$

Esercizio 1.5.2 Si provi il principio di induzione completa senza far uso del buon ordinamento dei naturali.

Diciamo che n è P-completo se per ogni $x < n$ vale $P(x)$. Diciamo che P è progressiva se, per ogni n, se n è P-completo allora $P(n)$. Innanzitutto dimostriamo, sfruttando il principio di induzione, che se P è progressiva allora, per ogni n, n è P-completo. Per ogni x, se $x < 0$ allora $P(x)$, dato che $x < 0$

è sempre falsa: quindi 0 è P-completo. Supponiamo ora che k sia P-completo e dimostriamo che $k+1$ è P-completo ossia che per ogni x, se $x < k+1$ allora $P(x)$. Se $x < k+1$ distinguiamo due casi: $x < k$ e $x = k$. Nel primo caso otteniamo $P(x)$ dal fatto che k è P-completo. Nel secondo caso otteniamo $P(x)$ dal fatto che P è progressiva unito al fatto che k è P-completo.

Dimostriamo ora il principio di induzione completa: se $P \subseteq \omega$ è progressiva allora $P = \omega$. Se P è progressiva allora, per quanto abbiamo dimostrato sopra, ogni n è P-completo. Ma se P è progressiva allora dalla P-completezza di n scende $P(n)$, quindi $\omega \subseteq P$ e poiché P èuna proprietà di naturali vale $P = \omega$.

1.6 Il teorema di Cantor

Esercizio 1.6.1 Si dimostri che gli insiemi seguenti sono tutti numerabili:

a) i numeri pari $\{x : x = 2n, n \in \omega\}$,

b) i numeri dispari $\{x : x = 2n+1, n \in \omega\}$,

c) per ogni $n \in \omega$, l'insieme $\{x : x \geq n\}$,

d) l'insieme Z dei numeri relativi.

Definiamo nei vari casi una biiezione f tra ω e l'insieme in questione.

a. $f(x) = 2x$.

b. $f(x) = 2x + 1$.

c. $f(x) = x + n$.

d. Se $0 \leq x$ poniamo $f(x) = 2x$, se $x < 0$ poniamo $f(x) = -2x + 1$.

Esercizio 1.6.2 Si dimostri che le operazioni di somma, prodotto ed elevamento a potenza sono definite correttamente, ossia:

a) se $A \sim A'$, $B \sim B'$ e le coppie di insiemi A , B e A', B' sono disgiunte, allora $|A| + |B| = |A'| + |B'|$,

b) se $A \sim A'$ e $B \sim B'$ allora $A \times B \sim A' \times B'$,

c) se $A \sim A'$ e $B \sim B'$, allora $A^B \sim A'^{B'}$.

In tutti e tre i casi esistono per ipotesi $f : A \to A'$ e $g : B \to B'$ iniettive e suriettive.

1. Definiamo una biiezione $h : A \cup B \to A' \cup B'$ ponendo $h = f \cup g$. Si ricordi che A è disgiunto da B, il che rende $f \cup g$ una funzione. Inoltre A' è disgiunto da B', il che rende una funzione $(f \cup g)^{-1}$.

2. Definiamo una biiezione $h : A \times B \to A' \times B'$ ponendo

$$h(x) = (f((x)_0), g((x)_1))$$

dove $(x)_0$ e $(x)_1$ sono rispettivamente la funzione che associa alla successione di due oggetti x il suo primo componente e il suo secondo componente. Si verifica facilmente che h è iniettiva e suriettiva.

3. Definiamo una funzione $h : A^B \to A'^{B'}$ ponendo per ogni $x \in A^B$

$$h(x) = f \circ x \circ g^{-1}.$$

Si verifica facilmente che h è iniettiva. Per quanto riguarda la suriettività abbiamo, per ogni $x' \in A'^{B'}$,

$$\begin{aligned} h(f^{-1} \circ x' \circ g) &= f \circ (f^{-1} \circ x' \circ g) \circ g^{-1} \\ &= id_{A'} \circ x \circ id_{B'} \\ &= x'. \end{aligned}$$

Esercizio 1.6.3 Siano $f : A \to B$ e $g : B \to A$ iniettive, allora esistono due sottoinsiemi A_0 e A_1 di A e due sottoinsiemi B_0 e B_1 di B tali che:

1. $A_0 \cap A_1 = \emptyset$, $A_0 \cup A_1 = A$, $B_0 \cap B_1 = \emptyset$, $B_0 \cup B_1 = B$,
2. $f[A_0] = B_0$ e $g[B_1] = A_1$.

1. Sia $R = A - g[B]$ e $\varphi : P(A) \to P(A)$ tale che $\varphi(X) = R \cup g[f[X]]$. Si dimostra facilmente che φ è monotona e quindi, per l'esercizio 1.1.7 ha un punto fisso K. Poniamo $A_0 = K$, $A_1 = A - A_0$ e $B_0 = f[A_0]$, $B_1 = B - B_0$. La condizione 1) è evidentemente soddisfatta. Per quanto riguarda la condizione 2) osserviamo che

$$\begin{aligned} g[B - B_0] &= g[B - f[A_0]] \\ &= g[B] - g[f[A_0]] \\ &= (A - R) - g[f[A_0]] \\ &= A - (R \cup g[f[A_0]]) \\ &= A - A_0 \\ & A_{1.} \end{aligned}$$

La seconda riga si ottiene per il punto 3) dell'esercizio 1.1.6, la terza riga si ottiene dal fatto che $R = A - g[B]$, la quarta riga si ottiene dal punto 4) dell'esercizio 1.1.2.

Esercizio 1.6.4 Teorema di Schröder-Bernstein. Se $f : A \to B$ e $g : B \to A$ sono iniettive, allora esiste una biiezione tra A e B.

Usando l'esercizio precedente, definiamo una biiezione $h : A \to B$ ponendo

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \in A_0 \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in A_1. \end{cases}$$

Capitolo 2

Strutture

2.1 Strutture e tipi

2.2 Iso e monomorfismi

Esercizio 2.2.1 Si dimostri che ogni struttura $(A, \leq)$, dove $\leq$ è un ordine parziale, è isomorfa a una struttura $(B, \subseteq)$ dove $\subseteq$ è l'inclusione insiemistica.

Definiamo $B = \{\{b : b \leq a\} : a \in A\}$ e definiamo una funzione $f : A \to B$ ponendo $f(a) = \{b : b \leq a\}$. La funzione f è iniettiva: se $f(a) = f(a')$ allora i due insiemi $\{b : b \leq a\}$ e $\{b : b \leq a'\}$ sono uguali e quindi hanno gli stessi elementi. Poiché a è elemento del primo, è anche elemento del secondo e quindi $a \leq a'$. Poiché a' è elemento del secondo, è anche elemento del primo e quindi $a' \leq a$. Poiché $(A, \leq)$ è un ordine parziale la relazione $\leq$ è antisimmetrica e quindi $a = a'$. Evidentemente f è suriettiva. Mostriamo infine che f conserva l'ordine: se $a \leq a'$ allora $f(a) \subseteq f(a')$. Infatti se b appartiene a $\{b : b \leq a\}$ allora $b \leq a$, ma allora $b \leq a'$ e quindi b appartiene a $\{b : b \leq a'\}$.

Esercizio 2.2.2 Si determini se A è immergibile in B, se $A \simeq B$, se $A \subseteq B$ in ognuno dei casi seguenti:

1. $\mathcal{A} = (\omega, \leq)$ e $\mathcal{B} = (Z, \leq)$,
2. $\mathcal{A} = (\omega, +, \cdot)$ e $\mathcal{B} = (Z, +, \cdot)$,
3. $\mathcal{A} = (\omega, +, \cdot)$ e $\mathcal{B} = (Z, \cdot, +)$,
4. $\mathcal{A} = (\omega, +, 0)$ e $\mathcal{B} = (\omega, \cdot, 1)$.

1. $\mathcal{A}$ è immergibile in $\mathcal{B}$ mediante l'identità e quindi è sottostruttura di $\mathcal{B}$. Le due strutture non sono isomorfe perché la prima ha un elemento minimo rispetto a $\leq$ che non può avere un'immagine in $\mathcal{B}$.

2. $\mathcal{A}$ è immergibile in $\mathcal{B}$ mediante l'identità e quindi è sottostruttura di $\mathcal{B}$. Le due strutture non sono isomorfe. Supponiamo infatti che esista un isomorfsmo

$f : \omega \to Z$. Poiché $0 + a = a$, per ogni $a \in A$, deve essere $f(a) = f(0) + f(a)$. Ciò significa che $f(0)$ deve essere un elemento $b \in B$ tale che $b + x = x$ per ogni $x \in B$. L'unico candidato è 0 e quindi deve essere $f(0) = 0$. Con un ragionamento analogo, usando il prodotto al posto della somma, si dimostra che deve essere $f(1) = 1$. Poiché f è un morfismo, deve essere anche

$$f(2) = f(1 + 1) = f(1) + f(1) = 1 + 1 = 2.$$

In generale sarà allora $f(n) = n$ e ciò dimostra che f non può essere suriettiva e quindi non è un isomorfismo.

3. $\mathcal{A}$ non è immergibile in $\mathcal{B}$ e a maggior ragione non è isomorfa e non è sottostruttura. Basta osservare che al prodotto in $\mathcal{A}$ dovrebbe corrispondere la somma in $\mathcal{B}$ e che in $\mathcal{B}$ non si può trovare un'immagine adeguata dello 0 di $\mathcal{A}$: un elemento che si comporti rispetto alla somma come lo 0 si comporta rispetto al prodotto. Abbiamo infatti $0 \cdot a = 0$ e se esistesse un morfismo f dovremmo avere $f(0 \cdot a) = f(0) + f(a)$ e quindi $f(0) = f(0) + f(a)$. Ma comunque si scelga $f(0)$ quest'ultima equazione risulta falsa (tranne nel caso particolare in cui $f(a)$ è esso stesso 0).

4. È possibile immergere $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ponendo $f(n) = k^n$, dove k è un numero naturale qualsiasi maggiore di 1. La f è evidentemente iniettiva, vale inoltre sia $f(0) = k^0 = 1$ sia

$$\begin{aligned} f(a + a') &= k^{a+a'} \\ &= k^a \cdot k^{a'} \\ &= f(a) \cdot f(a'). \end{aligned}$$

Non esiste nessun isomorfismo $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Se f fosse un isomorfismo dovrebbe essere $f(0) = 1$. Inoltre f sarebbe suriettiva e quindi esisterebbe un $n \neq 0$ tale che $f(n) = 0$. Avremmo allora in generale

$$f(n + n) = f(n) \cdot f(n) = 0 \cdot 0 = 0.$$

Ma allora $f(n) = f(2n)$ e f non sarebbe iniettiva. Evidentemente $\mathcal{A}$ non è sottostruttura di $\mathcal{B}$.

Esercizio 2.2.3 Si determini se A è immergibile in B quando

1. $\mathcal{A} = (\omega, \leq, \cdot, 1)$ e $\mathcal{B} = (\omega, \leq, +, 0)$.
2. $\mathcal{A} = (\omega - \{0\}, \leq, \cdot, 1)$ e $\mathcal{B} = (\omega, \leq, +, 0)$.
3. $\mathcal{A} = (\omega - \{0\}, \cdot, 1)$ e $\mathcal{B} = (\omega, +, 0)$.

1. $\mathcal{A}$ non è immergibile in $\mathcal{B}$ perché non esiste un'adeguata immagine dello 0. Se esistesse un'immersione f di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ allora avremmo $f(0) = n$ per qualche n. Preso un $x \neq n$ avremmo allora $f(0 \cdot x) = f(0) + f(x)$ e quindi $f(0) = n + f(x)$. Poiché $f(0) = n$ deve essere $f(x) = 0$, contraddicendo l'iniettività di f.

2. $\mathcal{A}$ non è immergibile in $\mathcal{B}$ perché se esistesse un'immersione f capace di conservare le operazioni e le costanti, non potrebbe conservare l'ordine. Infatti se f conserva le costanti avremo $f(1) = 0$. Poiché f è iniettiva avremo $f(2) = k$, per qualche $k \neq 0$. Avremo allora

$$f(2^0) = 0, f(2^1) = k, \ldots, f(2^{n+1}) = f(2^n \cdot 2^1) = f(2^n) + k.$$

Avremo allora in generale $f(2^n) = n \cdot k$. Mentre l'intervallo fra 2^n e 2^{n+1} contiene $2^n - 1$ elementi e cresce al crescere di n, l'intervallo fra $f(2^n)$ e $f(2^{n+1})$ contiene sempre k elementi e resta costante. Poiché f deve conservare l'ordine, gli elementi nell'intervallo 2^n e 2^{n+1} vanno collocati, con immagini distinte fra loro, nell'intervallo fra $f(2^n) = n \cdot k$ e $f(2^{n+1}) = (n+1) \cdot k$, ma ciò non è possibile quando il numero di tali elementi, $2^n - 1$, supera k.

3. Consideriamo due numeri primi p e q e gli insiemi $A = \{p^n : n \in \omega\}$ e $B = \{q^n : n \in \omega\}$. I due insiemi sono disgiunti e quindi, se esistesse un'immersione f di $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$, dovrebbero avere immagini disgiunte. Poiché l'immagine di A è $\{n \cdot f(p) : n \in \omega\}$ e quella di B è $\{n \cdot f(q) : n \in \omega\}$, si vede immediatamente che tali immagini hanno in comune almeno $f(q) \cdot f(p)$.

Esercizio 2.2.4 Sia $\mathcal{A} = (P(\{a, b\}, \cap, \cup)$ e $\mathcal{B} = (P(\{a, b, c\}, \cap, \cup)$. Si dimostri che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$. Supponiamo che $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$ siano ottenute aggiungendo alle strutture precedenti l'operazione di complemento: si dimostri che $\mathcal{A}' \not\subseteq \mathcal{B}'$.

Poiché ogni sottoinsieme di $\{a, b\}$ è un sottoinsieme di $\{a, b, c\}$, il dominio di $\mathcal{A}$ è incluso in quello di $\mathcal{B}$, inoltre le operazioni $\cap$ e $\cup$ in $\mathcal{A}$ sono la restrizione delle operazioni corrispondenti di $\mathcal{B}$. Quindi $\mathcal{A}$ è sottostruttura di $\mathcal{B}$. Se espandiamo le due strutture introducendovi l'operazione di complemento, l'operazione di complemento in $\mathcal{A}'$ non coincide con la restrizione dell'operazione di complemento in $\mathcal{B}'$: ad esempio, il complemento di $\{a\}$ in $\mathcal{A}'$ è $\{b\}$ mentre il complemento di $\{a\}$ in $\mathcal{B}'$ è $\{a, b\}$. Quindi $\mathcal{A}'$ non è sottostruttura di $\mathcal{B}'$.

Esercizio 2.2.5 Si dimostri che la relazione $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ è di equivalenza e che la relazione $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ è un ordine parziale.

La relazione $\simeq$ è riflessiva perché l'identità è un isomorfismo ed è transitiva perché la composizione di due isomorfismi è ancora un isomorfismo. Inoltre se f è un isomorfismo tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, allora f^{-1} è un isomorfismo tra $\mathcal{B}$ e $\mathcal{A}$, quindi la relazione $\simeq$ è simmetrica. Possiamo quindi considerare classi d'equivalenza di strutture isomorfe.

La relazione $\subseteq$ tra strutture è evidentemente riflessiva. Se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ allora vale sia $A \subseteq B$ sia $B \subseteq A$ e quindi $A = B$. Ma allora da $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e $A = B$ scende $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Quindi la relazione $\subseteq$ tra strutture è antisimmetrica. (Si noti che date due strutture qualsiasi $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, dalla sola ipotesi $A = B$ non scende $\mathcal{A} = \mathcal{B}$.) Supponiamo ora che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}$. Mostriamo che ogni relazione di $\mathcal{A}$ è la restrizione ad A della relazione corrispondente di $\mathcal{C}$. Infatti $R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{B}} \cap A^n$ e $R^{\mathcal{B}} = R^{\mathcal{C}} \cap B^n$, quindi

$$R^{\mathcal{A}} = R^{\mathcal{B}} \cap A^n = (R^{\mathcal{C}} \cap B^n) \cap A^n = R^{\mathcal{C}} \cap A^n$$

dato che $B^n \cap A^n = A^n$, essendo $A \subseteq B$. Mostriamo che ogni funzione di $\mathcal{A}$ è la restrizione ad A della funzione corrispondente in $\mathcal{C}$. Supponiamo per semplicità che $F^{\mathcal{A}}$ sia unaria, allora per ogni $a \in A$ vale $F^{\mathcal{A}}(a) = F^{\mathcal{B}}(a)$, essendo $F^{\mathcal{A}}$ la restrizione di $F^{\mathcal{B}}$ ad A. Ma $F^{\mathcal{B}}(a) = F^{\mathcal{C}}(a)$, essendo $F^{\mathcal{B}}$ la restrizione di $F^{\mathcal{C}}$ a B, quindi $F^{\mathcal{A}}(a) = F^{\mathcal{C}}(a)$. Un discorso analogo vale per le costanti.

Esercizio 2.2.6 Definiamo $R(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ sse $\mathcal{A}$ è immergibile in $\mathcal{B}$. Si dimostri che:

1. R è riflessiva e transitiva ma non antisimmetrica,
2. $R(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $R(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ non implica $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

1. La relazione è riflessiva perché l'identità è un monomorfismo ed è transitiva perché la composizione di monomorfismi è ancora un monomorfismo. Tuttavia non è un ordine parziale perché non è antisimmetrica: l'esistenza di un monomorfismo da $\mathcal{A}$ verso $\mathcal{B}$ e viceversa non comporta che le due strutture siano identiche. Basta considerare $(\omega, \leq)$ e $(P, \leq)$, dove P è l'insieme dei pari: le due strutture non sono identiche, sebbene siano isomorfe.

2. Potremmo indebolire le nostre richieste, sostituendo l'identità con l'isomorfismo; in tal modo l'immergibilità risulterebbe un ordine parziale tra classi d'equivalenza di strutture isomorfe, ma anche questo è falso. Siano $\mathcal{A}$ la struttura $(Q^+, \leq)$ e $\mathcal{B}$ la struttura $(Q, \leq)$, dove Q^+ è l'insieme dei razionali maggiori o uguali a 0. Sebbene valga $R(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ e $R(\mathcal{B}, \mathcal{A})$ le due strutture non sono isomorfe, perché la prima ha un primo elemento che invece manca nella seconda.

Esercizio 2.2.7 (Questo esercizio richiede alcuni risultati di aritmetica cardinale.) Sia A un insieme di cardinalità infinita α. Si determini il numero di strutture distinte di dominio A (vale a dire strutture ottenute con differenti interpretazioni dei simboli del tipo) nei casi seguenti:

1. $\tau = (\{c\})$ $[\alpha]$
2. $\tau = (\{c_k\}_{k \in K})$ $[\alpha^{|K|}]$
3. $\tau = (\{F_0\})$ $[2^{\alpha}]$
4. $\tau = (\{F_j\}_{j \in J})$ $[2^{\alpha+|J|}]$
5. $\tau = (\{R_0\})$ $[2^{\alpha}]$
6. $\tau = (\{R_i\}_{i \in I})$ $[2^{\alpha+|I|}]$

1. Se il dominio contiene α elementi, allora esistono α modi distinti di interpretare c.

2. La successione di costanti $\{c_k\}_{k \in K}$ può essere interpretata in

$$\underbrace{\alpha \cdot \ldots \cdot \alpha}_{|K| \text{volte}} = \alpha^{|K|}$$

modi differenti..

3. Supponiamo che F sia n-ario, allora le sue interpretazioni differenti sono
$$\alpha^{(\alpha^n)} = \alpha^\alpha = 2^\alpha.$$
4. Le interpretazioni differenti della successione $\{F_j\}_{j\in J}$ sono
$$\underbrace{2^\alpha \cdot \ldots \cdot 2^\alpha}_{|J|\text{volte}} = (2^\alpha)^{|J|} = 2^{\alpha+|J|}.$$
5. Supponiamo che R sia n-aria, allora le sue interpretazioni differenti sono
$$|P(A^n)| = 2^{(\alpha^n)} = 2^\alpha.$$
6. Le interpretazioni differenti della successione $\{R_i\}_{i\in I}$ sono
$$\underbrace{2^\alpha \cdot \ldots \cdot 2^\alpha}_{|I|\text{volte}} = (2^\alpha)^{|I|} = 2^{\alpha+|I|}.$$

Esercizio 2.2.8 Sia $|\tau| = \sup\{|I|, |J|, |K|\}$. Se α è il cardinale di A ed è infinito, si dimostri che esistono al più $2^{\sup\{\alpha,|\tau|\}}$ strutture non isomorfe di tipo τ e dominio A.

Il numero delle strutture non isomorfe di dominio A è limitato superiormente dal numero delle strutture distinte di dominio A, ovvero ottenute con differenti interpretazioni dei simboli del tipo τ, che può essere calcolato utilizzando l'esercizio precedente:

$$\begin{aligned}
\alpha^{|K|} \cdot 2^{\alpha+|J|} \cdot 2^{\alpha+|J|} &= \alpha^{|K|} \cdot 2^{\alpha+|J|+|I|} \\
&= \alpha^{|K|} \cdot \alpha^{\alpha+|J|+|I|} \\
&= \alpha^{|K|+|J|+|I|+\alpha} \\
&= \alpha^{\sup(|\tau|,\alpha)} \\
&= 2^{\sup(|\tau|,\alpha)}.
\end{aligned}$$

2.3 Omomorfismi

Esercizio 2.3.1 Si dimostri che, nel caso degli ordini, un omomorfismo forte è addirittura un monomorfismo.

Se $\phi(x) = \phi(y)$ allora $\phi(x) \leq \phi(y)$ e $\phi(y) \leq \phi(x)$. Poiché ϕ è un omomorfismo forte, vale sia $x \leq y$ sia $y \leq x$ da cui $x = y$ per l'antisimmetria.

2.4 Reticoli e algebre di Boole

Esercizio 2.4.1 Si dimostri che ogni catena (insieme totalmente ordinato) è un reticolo. Si fornisca quindi un esempio di reticolo non limitato.

Dati a, $b \in A$ vale $a \leq b$ oppure $b \leq a$. Nel primo caso $a = \inf\{a, b\}$ dato che $a \leq a$ e $a \leq b$ e per ogni x tale che $x \leq a$ e $x \leq b$ vale ovviamente $x \leq a$. Analogamente si dimostra che $b = \sup\{a, b\}$. Nello stesso modo si procede se $b \leq a$. L'insieme degli interi relativi Z è una catena ed è un esempio di reticolo non limitato.

Esercizio 2.4.2 Se $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee)$ e $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee)$ sono reticoli e $\phi{:}\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è un omomorfismo, allora ϕ conserva anche la relazione d'ordine associata ai reticoli. Se $\mathcal{A} = (A, \leq)$ e $\mathcal{B} = (B, \leq)$ sono reticoli e $\phi{:}\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è un omomorfismo, allora ϕ in genere non conserva le operazioni inf e sup.

Supponiamo che x e $y \in A$ e che valga $x \leq y$ ossia $x \vee y = y$. Poiché ϕ è un omomorfismo vale $\phi(x) \vee \phi(y) = \phi(x \vee y) = \phi(y)$ e quindi $\phi(x) \leq \phi(y)$ per come è definita $\leq$. Analogamente si procede con $\wedge$. La figura all'inizio del paragrafo 2.3 fornisce un esempio di omomorfismo che conserva l'ordine ma non le operazioni inf e sup: basta osservare $\sup\{c, d\} = e$ mentre $\sup\{\phi(c), \phi(d)\} \neq \phi(e)$.

Esercizio 2.4.3 Espandiamo un reticolo con due costanti 0 e 1 che soddisfino i due assiomi seguenti

1. $x \wedge 1 = x$,

2. $x \vee 0 = x$.

Si dimostri che il reticolo così ottenuto è limitato. Viceversa, si dimostri che in ogni reticolo limitato valgono 1) e 2).

Dobbiamo dimostrare che valgono gli assiomi M) $x \vee 1 = 1$ e m) $x \wedge 0 = 0$. Per l'assioma di assorbimento abbiamo $x \vee 1 = (x \wedge 1) \vee 1 = 1$ e $x \wedge 0 = (x \vee 0) \wedge 0 = 0$. Supponiamo ora che il reticolo sia limitato e che valgano quindi M) e m), allora per assorbimento abbiamo $x \wedge 1 = x \wedge (x \vee 1) = x$ e $x \vee 0 = x \vee (x \wedge 0) = x$.

Esercizio 2.4.4 Sia 2 il reticolo $\mathcal{R}(1) = (\{0, 1\}, \cap, \cup)$. Si dimostri che tutti i reticoli con due elementi sono isomorfi a 2. Si dimostri un risultato analogo per le algebre di Boole.

Consideriamo un reticolo $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee)$ dove $A = \{x, y\}$. Se $x \wedge y = x$ definiamo $\phi(x) = 0$ e $\phi(y) = 1$, se $x \wedge y = y$ definiamo $\psi(x) = 1$ e $\psi(y) = 0$. Mostriamo che sia ϕ che ψ sono ismorfismi tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{R}(1)$. Nel primo caso otteniamo, per l'assioma di assorbimento, $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y$ e quindi le tabelle di calcolo di $\wedge$ e $\vee$, tenendo conto degli assiomi di commutatività e del fatto che in ogni reticolo vale l'idempotenza, sono le seguenti:

$\wedge$	x	y
x	x	x
y	x	y

$\vee$	x	y
x	x	y
y	y	y

Per verificare che la ϕ è un isomorfismo basta osservare le tabelle di calcolo di $\cap$ e $\cup$ in $\mathcal{R}(1)$:

$\cap$	0	1
0	0	0
1	0	1

$\cup$	0	1
0	0	1
1	1	1

Nel secondo caso abbiamo $x \vee y = x \vee (x \wedge y) = x$ e quindi le tabelle di calcolo di $\wedge$ e $\vee$ diventano

$\wedge$	x	y
x	x	y
y	y	y

$\vee$	x	y
x	x	x
y	x	y

Per mostrare che ψ è un isomorfismo cambiamo l'intestazione delle tabelle per $\cap$ e $\cup$ in modo che a x corrisponda 1 e y corrisponda 0. (Si osservi che questa operazione non cambia le operazioni $\cap$ e $\cup$, ma solo il nostro modo di rappresentarle.) Abbiamo allora

$\cap$	1	0
1	1	0
0	0	0

$\cup$	1	0
1	1	1
0	1	0

Se $\mathcal{A}$ è un'algebra di Boole allora deve essere necessariamente $\neg x = y$, altrimenti se fosse $\neg x = x$ avremmo

$$x \wedge \neg x = x = x \vee \neg x$$

mentre $x \wedge \neg x$ e $x \vee \neg x$ devono necessariamente essere distinti in ogni algebra di Boole con almeno due elementi. (Se coincidessero allora avremmo $0 = 1$ e quindi, dovendosi ogni elemento collocare tra il minimo e il massimo, l'algebra finirebbe per contenere un solo elemento.) Analogamente deve essere $\neg y = x$. Si vede facilmente che ϕ e ψ conservano $\neg$.

Esercizio 2.4.5 Sia a un elemento fissato di A. Si dimostri che la funzione $f : P(A) \to 2$ definita ponendo, per ogni $X \subseteq A$,

$$f(X) = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad a \notin X \\ 1 & \text{se} \quad a \in X \end{cases}$$

è un omomorfismo da $\mathcal{B}(A)$ verso 2, dove 2 è l'algebra di Boole con due elementi.

Supponiamo che $a \notin X \cap Y$, allora $a \notin X$ oppure $a \notin Y$, quindi $f(X) = 0$ oppure $f(Y) = 0$ e quindi

$$f(X \cap Y) = 0 = f(X) \wedge f(Y).$$

Supponiamo che $a \in X \cap Y$, allora $a \in X$ e $a \in Y$, quindi $f(X) = 1$ e $f(Y) = 1$ e quindi

$$f(X \cap Y) = 1 = f(X) \wedge f(Y).$$

Supponiamo che $a \notin X \cup Y$, allora $a \notin X$ e $a \notin Y$, quindi $f(X) = 0$ e $f(Y) = 0$ e quindi

$$f(X \cup Y) = 0 = f(X) \vee f(Y).$$

Supponiamo che $a \in X \cup Y$, allora $a \in X$ oppure $a \in Y$, quindi $f(X) = 1$ oppure $f(Y) = 1$ e quindi

$$f(X \cup Y) = 1 = f(X) \vee f(Y).$$

Se $a \notin -X$ allora $a \in X$ e quindi $f(X) = 1$ e allora $f(-X) = 0 = \neg f(X)$. Se $a \in -X$ allora $a \notin X$ e quindi $f(X) = 0$ e allora $f(-X) = 1 = \neg f(X)$.

Esercizio 2.4.6 In ogni reticolo limitato A definiamo complemento di un elemento a un elemento a' tale che $a \wedge a' = 0$ e $a \vee a' = 1$. Diremo che un reticolo è complementato se è limitato e ogni elemento ha un complemento. Si dimostri che in un reticolo complementato e distributivo ogni elemento ha un unico complemento. Quindi in ogni reticolo complementato e distributivo si può espandere a un'algebra di Boole.

Supponiamo che a abbia due complementi x e x', allora $a \wedge x = 0$, $a \vee x = 1$, $a \wedge y = 0$, $a \vee y = 1$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned}
x &= x \wedge 1 \\
&= x \wedge (a \vee y) \\
&= (x \wedge a) \vee (x \wedge y) \\
&= 0 \vee (x \wedge y) \\
&= (a \wedge y) \vee (x \wedge y) \\
&= (a \vee x) \wedge y \\
&= 1 \wedge y \\
&= y.
\end{aligned}$$

2.5 Definizioni induttive

Esercizio 2.5.1 Supponiamo che $\mathcal{A}$ abbia dominio ω. Si verifichi che $I_{B,\mathcal{F}}$ è:

1. $\omega - \{0\}$ quando $B = \{1\}$ e $\mathcal{F} = \{+\}$,
2. ω quando $B = \{0\}$ e $\mathcal{F} = \{\sigma, +\}$,
3. $\{0\}$ quando $B = \{0\}$ e $\mathcal{F} = \{+\}$.

Se $\mathcal{F} = \{\cdot\}$, qual è il minimo B tale che $I_{B,\mathcal{F}} = \omega$?

1. Se $B = \{1\}$ e $F = \{+\}$ allora $\omega - \{0\}$ è $B, \mathcal{F}$-chiuso. Per ogni $X \subseteq \omega$, se X è $B, \mathcal{F}$-chiuso allora $\omega - \{0\}$ è incluso in X. Basta osservare che X contiene 1, e quindi, per ogni $n > 1$, $1 + 1 + \ldots + 1$(n-volte).

2. Se $B = \{0\}$ e $F = \{\sigma, +\}$ allora ω è $B, \mathcal{F}$-chiuso. Per ogni $X \subseteq \omega$, se X è $B, \mathcal{F}$-chiuso allora ω è incluso in X. Basta osservare che X contiene 0, $\sigma(0)$ ossia 1 e quindi, per ogni $n > 1$, $1 + 1 + \ldots + 1(n$-volte$)$.

3. Se $B = \{0\}$ e $F = \{+\}$ allora $\{0\}$ è $B, \mathcal{F}$-chiuso. Per ogni $X \subseteq \omega$, se X è $B, \mathcal{F}$-chiuso allora $\{0\}$ è incluso in X. Basta osservare che X contiene 0.

4. Se B è l'insieme dei numeri primi e $\mathcal{F} = \{\cdot\}$, allora $I_{B,\mathcal{F}} = \omega$. Per ogni B', se $B \not\subseteq B'$ allora $I_{B',\mathcal{F}} \neq \omega$, infatti se $p \in B$ e $p \notin B'$ allora p non può essere generato mediante $\cdot$ dagli elementi di B'.

2.6 Definizioni per recursione

Esercizio 2.6.1 Si dimostri che se $\mathcal{A}$ è generata liberamente, allora ogni elemento ha un'unica costruzione.

Supponiamo che $\mathcal{A}$ contenga un elemento a che possiede due costruzioni: dimostriamo che tali costruzioni coincidono per induzione sull'altezza della prima. Supponiamo che la prima abbia altezza 0 e che quindi $a \in B$ oppure $a = c^{\mathcal{A}}$. Allora anche la seconda deve avere altezza 0. Infatti, se avesse altezza maggiore di 0 sarebbe $a = F^{\mathcal{A}}(\overline{x})$, dove $\overline{x} = (x_0, \ldots, x_{n-1})$. Ma ciò è impossibile: nel primo caso perché per la 3) della definizione di struttura liberamente generata $B \cap \mathrm{Im}(F^{\mathcal{A}}) = \emptyset$, nel secondo caso perché per la 5) della stessa definizione $c^{\mathcal{A}} \notin \mathrm{Im}(F^{\mathcal{A}})$. Ma allora le due costruzioni di a sono entrambe di altezza 0. Resta da dimostrare che sono identiche. Se $a \in B$ allora la prima costruzione di a è costituita dalla funzione che associa all'albero $\tau = \{()\}$ l'elemento di B in questione. Ma allora anche la seconda costruzione è costituita nello stesso modo, dato che per la 1) abbiamo $c^{\mathcal{A}} \notin B$ per ogni costante c. Se $a = c^{\mathcal{A}}$ allora la prima costruzione di a è costituita dalla funzione che associa all'albero $\tau = \{()\}$ l'elemento $c^{\mathcal{A}}$. Ma allora anche la seconda costruzione è costituita nello stesso modo, dato che per la 1) abbiamo $c^{\mathcal{A}} \notin B$ per ogni costante c e per la 2) abbiamo $c^{\mathcal{A}} \neq e^{\mathcal{A}}$.

Supponiamo ora che la prima abbia altezza $k+1$, allora al suo vertice sarà associato $a = F^{\mathcal{A}}(\overline{x})$. La seconda costruzione non può avere altezza 0, altrimenti si avrebbe $a \in B$, il che è impossibile per la 3). Possiamo quindi supporre che al vertice della seconda sia associato $a = G^{\mathcal{A}}(\overline{y})$. Ma se $F^{\mathcal{A}}(\overline{x}) = G^{\mathcal{A}}(\overline{y})$ allora, poiché le immagini di $F^{\mathcal{A}}$ e di $G^{\mathcal{A}}$ devono essere disgiunte per la 4), deve essere $F^{\mathcal{A}} = G^{\mathcal{A}}$. Ma allora anche le arietà delle due funzioni coincidono e quindi $F^{\mathcal{A}}(x_0, \ldots, x_{n-1}) = G^{\mathcal{A}}(y_0, \ldots, y_{n-1})$. Per la 6) le due funzioni sono iniettive e quindi $x_i = y_i$ per $n < n$. Poiché per ipotesi induttiva ogni x_i possiede un'unica costruzione, le due costruzioni di a sono in realtà una sola.

2.7 Il lemma di Zorn

Esercizio 2.7.1

1. Si dimostri che ogni insieme parzialmente ordinato $(A, \leq)$ contiene una catena massimale. (Si consideri l'insieme $(B, \subseteq)$ di tutte le catene in $(A, \leq)$ e si dimostri che per esso valgono le ipotesi del lemma di Zorn.)

2. Si dimostri la seguente versione del lemma di Zorn: se $(A, \leq)$ è un insieme parzialmente ordinato tale che, per ogni catena $K \subseteq A$, A contiene un confine superiore di K, allora A contiene un elemento massimale. (Si consideri una catena massimale M in A, che esiste per il punto precedente, e si dimostri che ogni confine superiore di tale catena è un elemento massimale.)

1. Consideriamo l'insieme parzialmente ordinato $\mathcal{B} = (B, \subseteq)$ di tutte le catene in A e dimostriamo che contiene un elemento massimale, ossia una catena K tale che, per ogni altra catena $K' \in B$, $K \not\subseteq K'$. Per il lemma di Zorn possiamo ridurci a dimostrare che B è chiuso rispetto alle unioni di catene, ossia che per ogni catena $C \subseteq B$ vale $\bigcup C \in B$. (Si osservi che l'insieme B è parzialmente ordinato da $\subseteq$ e quindi sup corrisponde a $\bigcup$.) Dimostriamo che $\bigcup C$ è ancora una catena su A e quindi appartiene a B. Se $x, y \in \bigcup C$ allora esistono $K, K' \in C$ tali che $x \in K$ e $y \in K'$. Poiché C è una catena rispetto a $\subseteq$ vale $K \subseteq K'$ o $K' \subseteq K$. Supponiamo che $K \subseteq K'$, allora $x, y \in K'$. Poiché K' è una catena in A, deve essere $x \leq y$ o $y \leq x$: quindi x e y sono confrontabili rispetto a $\leq$ e $\bigcup C$ è una catena in A. Se $K' \subseteq K$ si procede nello stesso modo.

2. Per il punto precedente esiste una catena massimale K tra le catene in A. Per ipotesi A contiene un elemento a che è un confine superiore di K, ossia per ogni $x \in K$ vale $x \leq a$. Dimostriamo che a è massimale in A. Preso un $x \in A$ non può essere $a < x$, altrimenti $K \cup \{x\}$ sarebbe una catena in A che estende propriamente K e quindi K non sarebbe una catena massimale in A.

Capitolo 3

Logica enunciativa

3.1 Linguaggio enunciativo

Esercizio 3.1.1 Se p_0 denota l'enunciato "Bruno va al cinema", p_1 denota "la sera è fredda" e p_2 denota "I bar sono chiusi", si rappresentino con formule gli enunciati seguenti:

1. Se Bruno va al cinema allora o la sera è fredda o i bar sono chiusi

2. Se Bruno va al cinema e i bar non sono chiusi, allora la sera è fredda

3. O Bruno va al cinema e i bar sono chiusi, oppure la sera è fredda.

1. $p_0 \to (p_1 \vee p_2)$, ma per le convenzioni sull'eliminazione delle parentesi possiamo scrivere anche solamemente $p_0 \to p_1 \vee p_2$.
2. $(p_0 \wedge (\neg p_2)) \to p_1$, ma per le convenzioni sull'eliminazione delle parentesi possiamo scrivere $p_1 \wedge \neg p_2 \to p_1$.
3. $(p_1 \wedge p_2) \vee p_1$: qui le parentesi non sono eliminabili.

Esercizio 3.1.2 In ognuno dei seguenti enunciati si individuino gli enunciati elementari, assegnando a ciascuno una variabile p_i in modo che a enunciati elementari diversi corrispondano variabili diverse. Si traducano quindi gli enunciati in formule.

1. Anna è giovane e Bruno è vecchio

2. Bruno è vecchio ma è attivo

3. Anna e Bruno sono amici

4. Anna e Bruno non sono felici

5. Anna o Bruno vengono bocciati

6. Anna sostiene l'esame giovedì o venerdì

7. Anna va al cinema ammesso che piova e Bruno non sia a Torino

8. Anna va al cinema solo se piove

9. Quando Anna ha sete e non c'è the, ma solo allora, beve vodka

10. Questo esercizio non è né utile né divertente.

1. Ponendo p_0 = "Anna è giovane" e p_1 = "Bruno è vecchio" otteniamo la traduzione $p_0 \wedge p_1$.

2. Gli enunciati indecomponibili sono: "Bruno è vecchio" e "Bruno è attivo". Assegnando il primo a p_0 e il secondo a p_1 la traduzione è ancora $p_0 \wedge p_1$. La traduzione di *ma* con $\wedge$ è giustificabile osservando che sostituendo nell'enunciato *ma* con *e* si ottiene un enunciato di significato identico, sebbene il *ma* dia alla frase un'inflessione particolare e sottolinei che ci aspetteremmo che Bruno, data l'età, potrebbe essere meno attivo. Si potrebbe comunque ribattere che questa inflessione particolare è sufficiente a produrre un enunciato di significato differente. Per risolvere la questione occorre definire che cosa è il significato, problema che verrà affrontato nel terzo paragrafo. Per ora possiamo dire che due enunciati hanno lo stesso significato se, riferiti a una data realtà, risultano simultaneamente veri o simultaneamente falsi. E questo è precisamente il caso dell'enunciato con *e* e dell'enunciato con *ma*.

3. Sono possibili due traduzioni. La prima considera la coppia "Anna e Bruno" come un unico oggetto a cui si attribuisce la proprietà "essere amici". Quindi c'è un unico enunciato indecomponibile che viene tradotto con p_0. La seconda traduzione considera Anna e Bruno come due oggetti distinti e quindi considera la frase come se fosse equivalente a Anna è amica di Bruno e Bruno è amico di Anna. In questo caso siamo di fronte alla congiunzione di due enunciati indecomponibili e la traduzione è $p_0 \wedge p_1$. Generalmente è consigliabile analizzare la situazione individuando il maggior numero possibile di enunciati indecomponibili e quindi mettendo in luce il maggior numero possibile di nessi logici presenti (latenti). Vedremo in seguito che ciò permette di analizzare meglio i rapporti di conseguenza logica.

4. Ponendo p_0 = "Anna è felice" e p_1 = "Bruno è felice" otteniamo la traduzione $\neg p_0 \wedge \neg p_1$. Altra traduzione possibile, ma sconsigliabile per quanto detto sopra, è $p_0 \wedge p_1$, ponendo p_0 = "Anna non è felice" e p_1 = "Bruno non è felice".

5. Ponendo p_0 = "Anna viene bocciata" e p_1 = "Bruno viene bocciato" otteniamo la traduzione $p_0 \vee p_1$.

6. Ponendo p_0 = "Anna sostiene l'esame giovedì" e p_1 = "Anna sostiene l'esame venerdì" otteniamo la traduzione $p_0 \vee p_1$.

7. Ponendo p_0 = "Anna va al cinema", p_1 = "piove", p_2 = "Bruno è a Torino" otteniamo la traduzione $p_1 \wedge \neg p_2 \rightarrow p_0$.

8. Ponendo p_0 = "Anna va al cinema", p_1 = "piove" otteniamo la traduzione $p_0 \rightarrow p_1$.

9. Ponendo p_0 = "Anna ha sete", p_1 = "c'è the", p_2 = "Anna beve vodka" otteniamo la traduzione $p_0 \wedge \neg p_1 \leftrightarrow p_2$.

10. Ponendo p_0 = "questo esercizio è utile", p_1 = "questo esercizio è divertente" otteniamo la traduzione $\neg p_0 \wedge \neg p_1$.

Esercizio 3.1.3 Si verifichi che le espressioni ai punti 2 e 4 sono formule esibendo la loro costruzione, si verifichi che quelle ai punti 1 e 3 non sono formule mostrando che non possiedono una costruzione.

1. $\wedge p_0 p_1 \vee p_0 p_1$,

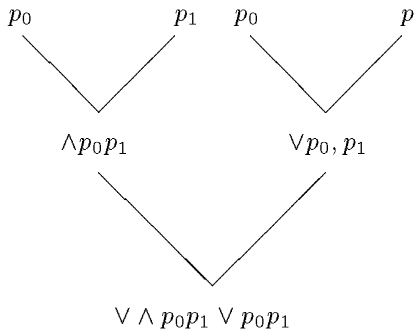
2. $\vee \wedge p_0 p_1 \vee p_0 p_1$,

3. $\neg \vee p_0 p_1 p_2$,

4. $\neg \wedge \vee p_0 p_1 \neg p_2$.

1. Dobbiamo trovare due espressioni e_0 e e_1 tali che $\mathcal{O}_\wedge(e_0, e_1) = \wedge p_0 p_1 \vee p_0 p_1$. Esistono diverse soluzioni, ad esempio $e_0 = p_0 p_1$ e $e_1 = \vee p_0 p_1$. Si tratta tuttavia di una soluzione da scartare perché e_0 è indecomponibile e quindi costituisce un nodo terminale dell'albero: ma una costruzione deve avere come nodi terminali solo variabili enunciative. Lo stesso accade per tutte le altre coppie tali che $e_0 * e_1 = p_0 p_1 \vee p_0 p_1$. Quindi non esiste una costruzione dell'espressione considerata.

2. Dobbiamo trovare due espressioni e_0 e e_1 tali che $\mathcal{O}_\vee(e_0, e_1) = \vee \wedge p_0 p_1 \vee p_0 p_1$. Tra le coppie (e_0, e_1) tali che $e_0 * e_1 = \wedge p_0 p_1 \vee p_0 p_1$ dobbiamo certamente scartare quelle in cui un c'è un elemento indecomponibile che non sia una variabile enunciativa. Ad esempio la coppia $e_0 = \wedge$ e $e_1 = p_0 p_1 \vee p_0 p_1$ va scartata perché entrambi sono indecomponibili e non sono variabili enunciative, lo stesso vale per la coppia $e_0 = \wedge p_0$ e $e_1 = p_1 \vee p_0 p_1$. La coppia $e_0 = \wedge p_0 p_1$ e $e_1 = \vee p_0 p_1$ è invece una soluzione accettabile e la riprenderemo in esame. La coppia $e_0 = \wedge p_0 p_1 \vee$ e $e_1 = p_0 p_1$ va scartata per il solito motivo mentre la coppia $e_0 = \wedge p_0 p_1 \vee p_0$ e $e_1 = p_1$ è invece una soluzione accettabile e la riprenderemo in esame. Esaminiamo la prima delle soluzioni accettabili: è chiaro che $e_0 = \mathcal{O}_\wedge(p_0 p_1)$ e $e_1 = \mathcal{O}_\vee(p_0 p_1)$. Otteniamo quindi una costruzione raffigurata dall'albero seguente:



Questa costruzione è anche l'unica possibile, per l'esercizio 2.6.3 unito al fatto che le formule sono generate liberamente, dimostrato nel paragrafo 3.2. Esaminiamo comunque la seconda soluzione accettabile. L'espressione e_1 può costituire il nodo terminale di una costruzione, ma $e_0 = \wedge p_0 p_1 \vee p_0$ va ulteriormente decomposta. Esaminando tutte le coppie (d_0, d_1) tali che $\mathrm{d}_0 * d_1 = p_0 p_1 \vee p_0$ si vede facilmente che tutte contengono almeno un elemento indecomponibile che non è una variabile.

3. Dobbiamo trovare un'espressione e tale che $\mathcal{O}_\neg(e) = \neg \vee p_0 p_1 p_2$ ed esiste solamente la soluzione $e = \vee p_0 p_1 p_2$. Abbiamo quindi un primo passo nella costruzione ponendo $\neg \vee p_0 p_1 p_2$ nel vertice e $\vee p_0 p_1 p_2$ nel nodo sottostante. Ora dobbiamo cercare due espressioni e_0 e e_1 tali che $\mathcal{O}_\vee(e_0, e_1) = \vee p_0 p_1 p_2$. Esistono diverse soluzioni, ad esempio $e_0 = p_0 p_1$ e $e_1 = p_2$. Si tratta tuttavia di una soluzione da scartare perché e_0 è indecomponibile e quindi costituisce un nodo terminale dell'albero: ma una costruzione deve avere come nodi terminali solo variabili enunciative. Lo stesso accade per l'altra coppia tale che $e_0 * e_1 = p_0 p_1 p_2$. Quindi non esiste una costruzione dell'espressione considerata.

4. Il primo passo è $\neg \wedge \vee p_0 p_1 \neg p_2 = \mathcal{O}_\neg(\wedge \vee p_0 p_1 \neg p_2.)$. Dobbiamo ora trovare due espressioni e_0 e e_1 tali che $\mathcal{O}_\wedge(e_0, e_1) = \vee p_0 p_1 \neg p_2$. Tra le coppie (e_0, e_1) tali che $e_0 * e_1 = \vee p_0 p_1 \neg p_2$ sono accettabili solo la coppia $e_0 = \vee p_0 p_1$ e $e_1 = \neg p_2$ e la coppia $e_0 = \vee p_0 p_1 \neg$ e $e_1 = p_2$. La prima dà origine a una costruzione mentre la seconda fallisce. Infatti tutte le soluzioni d_0 e d_1 dell'equazione $\vee p_0 p_1 \neg = \mathcal{O}_\vee(d_0, d_1)$ sono indecomponibili e non sono variabili enunciative.

3.2 Induzione e recursione sulle formule

3.3 Semantica enunciativa

Esercizio 3.3.1 Utilizzando il teorema 3.3.1, si verifichi che le formule seguenti sono tautologie:

1. $\alpha \to \alpha$ (legge d'identità),

2. $\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$ (legge della doppia negazione),

3. $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ (a fortiori),

4. $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ (legge di De Morgan),

5. $(\alpha \to \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \to \neg\alpha)$ (legge di contrapposizione),

6. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \leftrightarrow (\beta \to (\alpha \to \gamma))$ (scambio di premesse),

7. $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta \to \gamma)$,

8. $\alpha \to (\neg\alpha \to \beta)$ (ex falso sequitur quodlibet o legge di Duns Scoto).

1. La formula $\alpha \to \alpha$ è una tautologia sse $M(\alpha) \subseteq M(\alpha)$. Sul piano insiemistico $X \subseteq X$ è sempre vero, per la riflessività dell'inclusione. Più in generale in ogni algebra di Boole, e quindi anche nell'algebra degli insiemi, vale $x \leq x$, dove $\leq$ è la relazione d'ordine parziale associata definita ponendo $x \leq y$ sse $x \wedge y = x$ oppure $x \vee y = y$. Ora $x \leq x$ si ottiene dalle leggi di assorbimento $x \wedge x = x$ e $x \vee x = x$ (teorema 2.4.1).

2. La formula $\neg\neg\alpha \leftrightarrow \alpha$ è una tautologia sse $- - M(\alpha) = M(\alpha)$. Sul piano insiemistico si può dimostrare che $- - X = X$. Infatti $x \in - - X$ sse $x \notin -X$ sse $x \in X$. Più in generale in ogni algebra di Boole, e quindi anche nell'algebra degli insiemi, vale $\neg\neg x = x$ (punto 4) del teorema 2.4.5).

3. La formula $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ è una tautologia sse $M(\alpha) \subseteq M(\beta \to \alpha) = -M(\beta) \cup M(\alpha)$. Sul piano insiemistico vale $X \subseteq Y \cup X$. Più in generale in ogni algebra di Boole, e quindi anche nell'algebra degli insiemi, vale $x \leq y \vee x$.

4. La formula $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ è una tautologia sse

$$-(M(\alpha) \cup M(\beta)) = -M(\alpha) \cap -M(\beta).$$

Sul piano insiemistico vale $-(X \cup Y) = -X \cap -Y$. Infatti $a \in -(X \cup Y)$ sse $a \notin X \cup Y$ sse

$$a \notin \{b : b \in X \text{ o } b \in Y\}$$

sse $a \notin X$ e $a \notin Y$ (una disgiunzione è falsa se entrambi i disgiunti sono falsi) sse $a \in -X$ e $a \in -Y$ sse $a \in -X \cap -Y$. In modo analogo si dimostra l'altra inclusione. Più in generale in ogni algebra di Boole, e quindi anche nell'algebra degli insiemi, vale $\neg(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\neg\alpha \wedge \neg\beta)$ (punto 5) del teorema 2.4.5).

5. D'ora in poi ci limiteremo a indicare le giustificazioni insiemistiche dell'equivalenza dato che quelle algebriche sono identiche. Sul piano insiemistico vale $-X \cup Y = - - Y \cup -X$: basta osservare che vale $- - X = X$ e la proprietà commutativa.

6. Sul piano insiemistico vale $-X \cup (-Y \cup Z) = -Y \cup (-X \cup Z)$: si usano commutatività e associatività.

7. Sul piano insiemistico vale $-X \cup (-Y \cup Z) = -(Y \cap X) \cup Z$ utilizzando associatività e leggi di De Morgan.

8. Sul piano insiemistico vale $X \subseteq - - X \cup Y$: ciò si ottiene utilizzando $- - X = X$ e le proprietà di $\cup$ rispetto a $\subseteq$.

Esercizio 3.3.2 Si dimostri che, per ogni $\alpha \in Fm$ e ogni $\nu \in 2^\omega$, $f_\alpha(\nu) = Val_\nu(\alpha)$.

La dimostrazione è per induzione su α. Base dell'induzione, $\alpha = p_i$. Dobbiamo dimostrare che $f_{p_i}(\nu) = Val_\nu(p_i)$. Per definizione abbiamo

$$f_{p_i} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \nu \in M(p_i) \\ 0 & \text{se} \quad \nu \notin M(p_i) \end{cases}$$

e

$$Val_\nu(p_i) = \nu(i) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \nu \in M(p_i) \\ 0 & \text{se} \quad \nu \notin M(p_i). \end{cases}$$

Infatti $M(p_i) = \{\nu : \nu(i) = 1\}$. Passo induttivo. Supponiamo che sia $\alpha = \neg\beta$. Per ipotesi induttiva $f_\beta(\nu) = Val_\nu(\beta)$ e quindi $f_{\neg\beta}(\nu) = 1$ sse $\nu \in M(\neg\beta)$ sse $\nu \notin M(\beta)$ sse $f_\beta(\nu) = 0$ sse $Val_\nu(\beta) = 0$ sse $f_\neg(Val_\nu(\beta)) = 1$ sse $Val_\nu(\neg\beta) = 1$. Analogamente si dimostra che $f_{\neg\beta}(\nu) = 0$ sse $Val_\nu(\neg\beta) = 0$. Quindi $f_{\neg\beta}(\nu) = Val_\nu(\neg\beta)$. Il caso in α è $\beta \wedge \gamma$ e quello in cui α è $\beta \vee \gamma$ si trattano in modo simile.

Esercizio 3.3.3 Si considerino i linguaggi $\mathcal{L}_\wedge$ e $\mathcal{L}_\vee$ basati rispettivamente sui connettivi $\{\neg, \wedge\}$ e $\{\neg, \vee\}$. Dopo aver definito per essi una semantica nel modo usuale, si definiscano traduzioni verso e da $\mathcal{L}$ in modo che a ogni formula di $\mathcal{L}_\wedge$ e $\mathcal{L}_\vee$ sia associata una formula di $\mathcal{L}$ con lo stesso significato e viceversa.

Sia $Fm_\wedge$ l'algebra delle formule di $\mathcal{L}_\wedge$, coincidente con la restrizione di Fm a $\mathcal{L}_\wedge$. In modo analogo definiamo $Fm_\vee$. Definiamo il significato delle formule di $\mathcal{L}_\wedge$ mediante una funzione $M_\wedge$ coincidente con la restrizione di M a $Fm_\wedge$. In modo analogo definiamo $M_\vee$. In altri termini, sia $M_\wedge$ che $M_\vee$ assegnano alle formule di loro competenza il signifiato che assegnerebbe M. Definiamo ora una traduzione ϕ da $\mathcal{L}$ verso $\mathcal{L}_\wedge$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\phi(p_i) &= p_i, \\
\phi(\neg\alpha) &= \neg\phi(\alpha), \\
\phi(\alpha \wedge \beta) &= \phi(\alpha) \wedge \phi(\beta), \\
\phi(\alpha \vee \beta) &= \neg(\neg\phi(\alpha) \wedge \neg\phi(\beta)).
\end{aligned}$$

Dimostriamo che, per ogni formula α di $\mathcal{L}$, vale $M(\alpha) = M_\wedge(\phi(\alpha))$. La dimostrazione è per induzione su α. La base dell'induzione e i casi relativi a $\neg$ e $\wedge$ sono evidenti. Il caso relativo a $\vee$ si ottiene osservando che, per la legge di De Morgan e la doppia negazione, si ha

$$-(-X \cap -Y) = - - X \cup - - Y = X \cup Y.$$

Definiamo la traduzione da $\mathcal{L}_\wedge$ verso $\mathcal{L}$ in modo che sia l'identità e quindi in questo caso l'identità di significato è evidente. Definiamo una traduzione ψ da $\mathcal{L}$ verso $\mathcal{L}_\vee$ nel modo seguente:

$$\begin{aligned}
\psi(p_i) &= p_i, \\
\psi(\neg\alpha) &= \neg\psi(\alpha), \\
\psi(\alpha \wedge \beta) &= \neg(\neg\psi(\alpha) \vee \neg\psi(\beta)), \\
\psi(\alpha \vee \beta) &= \psi(\alpha) \vee \psi(\beta).
\end{aligned}$$

Dimostriamo che, per ogni formula α di $\mathcal{L}$, vale $M(\alpha) = M_\vee(\psi(\alpha))$. La dimostrazione è per induzione su α. La base dell'induzione e i casi relativi a $\neg$ e $\vee$ sono evidenti. Il caso relativo a $\wedge$ si ottiene osservando che, per la legge di De Morgan e la doppia negazione, si ha

$$-(-X \cup -Y) = - - X \cap - - Y = X \cap Y.$$

Definiamo la traduzione da $\mathcal{L}_\vee$ verso $\mathcal{L}$ in modo che sia l'identità e quindi in questo caso l'identità di significato è evidente.

Esercizio 3.3.4 Diciamo che $X \subseteq 2^\omega$ è n-completo se, per ogni ν, $\mu \in 2^\omega$, $\nu \in X$ e $\nu \upharpoonright n = \mu \upharpoonright n$ implica $\mu \in X$. Si dimostri che gli insiemi n-completi formano un'algebra di Boole $\mathcal{A}$ che è sottoalgebra di $\mathcal{B}(2^\omega)$, l'algebra dei sottoinsiemi di 2^ω. Si consideri la funzione $f : P(2^\omega) \to P(2^n)$ definita ponendo $f(X) = X \upharpoonright n$. Si verifichi che f non è un morfismo, mentre la restrizione di f ad $\mathcal{A}$ lo è. Si dimostri che gli n-completi coincidono con le immagini delle formule n-arie in M.

Per dimostrare che il sottoinsieme di $P(2^\omega)$ costituito dagli insiemi n-completi forma una sottoalgebra di $\mathcal{B}(2^\omega)$ basta dimostrare che è chiuso rispetto alle operazioni di intersezione, unione e complemento. Supponiamo che X e Y siano n-completi, allora anche $X \cap Y$ lo è. Infatti se $\nu \in X \cap Y$ e $\mu \upharpoonright n = \nu \upharpoonright n$, allora $\nu \in X$ e $\nu \in Y$ ed essendo X e Y insiemi n-completi $\mu \in X$ e $\mu \in Y$ e quindi $\mu \in X \cap Y$. Analogamente si dimostra la chiusura rispetto a $\cup$. Supponiamo che X sia n-completo e dimostriamo che anche $-X$ lo è. Se $\nu \in -X$ e $\mu \upharpoonright n = \nu \upharpoonright n$. allora $\nu \notin X$. Se fosse $\mu \in X$ allora per la n-completezza di X avremmo anche $\nu \in X$, il che è assurdo. Quindi $\mu \notin X$ e $\mu \in -X$.

Dimostriamo che $f(X) = X \upharpoonright n$ non è un morfismo di $\mathcal{B}(2^\omega)$ verso $X \upharpoonright n = Y \upharpoonright n$. Basta mostrare che non conserva l'intersezione ossia che

$$f(X \cap Y) = X \cap Y \upharpoonright n \neq (X \upharpoonright n) \cap (Y \upharpoonright n) = f(X) \cap f(Y).$$

Basta considerare $X = \{\nu\}$ e $Y = \{\mu\}$ dove $\nu \neq \mu$ pur essendo $\mu \upharpoonright n = \nu \upharpoonright n$. Abbiamo allora $X \cap Y = \emptyset$ e quindi $X \cap Y \upharpoonright n = \emptyset$, mentre $(X \upharpoonright n) \cap (Y \upharpoonright n) = \{\mu \upharpoonright n\}$.

Dimostriamo che f è un morfismo dalla sottostruttura $\mathcal{A}$ degli n-chiusi verso $\mathcal{B}(2^n)$. Mostriamo che f conserva l'intersezione ossia che, se X e Y sono n-chiusi, allora

$$f(X \cap Y) = X \cap Y \upharpoonright n = (X \upharpoonright n) \cap (Y \upharpoonright n) = f(X) \cap f(Y).$$

Supponiamo che s sia un elemento qualsiasi di 2^n. Se $s \in X \cap Y \upharpoonright n$ allora esiste $\nu \in X \cap Y$ tale che $\nu \upharpoonright n = s$. Allora $\nu \in X$ e $\nu \in Y$ e quindi $\nu \upharpoonright n \in X \upharpoonright n$ e $\nu \upharpoonright n \in Y \upharpoonright n$ e quindi $s \in (X \upharpoonright n) \cap (Y \upharpoonright n)$. Supponiamo ora che s appartenga a $(X \upharpoonright n) \cap (Y \upharpoonright n)$, allora s appartiene sia a $(X \upharpoonright n)$ che a $(Y \upharpoonright n)$ e quindi esistono $\nu \in X$ e $\mu \in Y$ tali che $\mu \upharpoonright n = s = \nu \upharpoonright n$. Poiché X e Y sono n-chiusi possiamo concludere che $\nu \in Y$ e $\mu \in X$. Questo ci basta per concludere che $\nu \in X \cap Y$ e quindi che $s \in X \cap Y \upharpoonright n$. In modo analogo si procede per mostrare che f conserva $\cup$. Mostriamo ora che f conserva il complemento:

$$f(-X) = (-X) \upharpoonright n = -(X \upharpoonright n) = -f(X).$$

Supponiamo che s appartenga a $(-X) \upharpoonright n$, allora esiste $\nu \in -X$ tale che $\nu \upharpoonright n = s$. Poiché $\nu \notin X$ e X è n-chiuso, ogni $\mu \in X$ è tale che $\mu \upharpoonright n \neq s$, altrimenti anche ν apparterrebbe a X. Quindi $s \notin X \upharpoonright n$, ma allora $s \in -(X \upharpoonright n)$. Viceversa, supponiamo che s appartenga a $-(X \upharpoonright n)$, allora s non appartiene a $X \upharpoonright n$ e quindi per ogni $\nu \in X$ vale $\nu \upharpoonright n \neq s$. Sia μ tale che $\mu \upharpoonright n = s$: deve valere $\mu \notin X$ e quindi $\mu \in -X$, ma allora $s \in (-X) \upharpoonright n$.

3.4 Significato finitario

Esercizio 3.4.1 Si dimostri che per ogni α, $\beta \in Fm_n$,

1. $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$ sse $M^n(\alpha) \subseteq M^n(\beta)$,
2. $M(\alpha) = M(\beta)$ sse $M^n(\alpha) = M^n(\beta)$.

1. Dimostriamo innazitutto che la funzione $f(X) = X \restriction n$ dall'insieme degli n-chiusi verso $P(2^n)$ è iniettiva ossia che $X \restriction n = Y \restriction n$ implica $X = Y$. Se $X \restriction n = \emptyset = Y \restriction n$ allora deve essere sia $X = \emptyset$ sia $Y = \emptyset$. Supponiamo che $X \restriction n$ sia diverso da $\emptyset$, allora sia X che Y sono diversi da $\emptyset$. Se $\nu \in X$ allora $\nu \restriction n \in X \restriction n = Y \restriction n$ e quindi esiste $\mu \in Y$ tale che $\mu \restriction n = \nu \restriction n$, ma allora $\nu \in Y$ dato che Y è n-chiuso. Nello stesso modo si dimostra che $Y \subseteq X$ e quindi $X = Y$.

Come abbiamo mostrato nell'esercizio 3.3.4, la f è un morfismo dagli insiemi n-chiusi verso $\mathcal{B}(2^n)$, ora sappiamo che è un monomorfismo. (Di fatto è un isomorfismo: basta mostrare che per ogni insiemi di n-ple esiste una formula n-aria il cui significato finitario è precisamente tale insieme.) Osserviamo ora che $M(\alpha) \subseteq M(\beta)$ sse $M(\alpha) \cap M(\beta) = M(\alpha)$. I significati delle formule n-arie sono insiemi n-chiusi e quindi, per l'iniettività di $X \restriction n$ sugli insiemi n-chiusi,

$$M(\alpha) \cap M(\beta) = M(\alpha) \text{ sse } (M(\alpha) \cap M(\beta)) \restriction n = M(\alpha) \restriction n.$$

Poiché $X \restriction n$ è anche un morfismo

$$(M(\alpha) \cap M(\beta)) \restriction n = M(\alpha) \restriction n \text{ sse } (M(\alpha) \restriction n) \cap (M(\beta) \restriction n) = M(\alpha) \restriction n$$

e quindi per il teorema 3.4.3 possiamo concludere che

$$M(\alpha) \cap M(\beta) = M(\alpha) \text{ sse } M^n(\alpha) \cap M^n(\beta) = M^n(\alpha).$$

Infine $M^n(\alpha) \cap M^n(\beta) = M^n(\alpha)$ sse $M^n(\alpha) \subseteq M^n(\beta)$.

2. Basta osservare che $M^n(\alpha) = M^n(\beta)$ sse $M^n(\alpha) \subseteq M^n(\beta)$ e $M^n(\beta) \subseteq M^n(\alpha)$ e quindi applicare il punto precedente.

3.5 Sostituzione

Esercizio 3.5.1 Elencare le formule α e le sostituzioni σ tali che $So_\sigma(\alpha) = p_0 \wedge (\neg p_1 \vee p_0)$.

$\alpha = p_i$ e σ tale che $\sigma(p_i) = p_0 \wedge (\neg p_1 \vee p_0)$. Osserviamo che non ha importanza come sia definita σ sulle variabili differenti da p_i; inoltre α potrebbe essere qualsiasi altra variabile, cambiando opportunamente la definizione di σ.

$\alpha = p_i \wedge p_j$ e $\sigma(p_i) = p_0$, $\sigma(p_j) = \neg p_1 \vee p_0$. Non ha importanza come σ sia definita sulle variabili differenti da p_i e p_j. Qualsiasi coppia i', j', purché sia $i' \neq j'$ serve allo scopo, ridefinendo opportunamente σ.

$\alpha = p_i \wedge (p_j \vee p_k)$ e $\sigma(p_i) = p_0$, $\sigma(p_j) = \neg p_1$, $\sigma(p_k) = p_0$. Vale un'osservazione analoga alla precedente.

$\alpha = p_i \wedge (\neg p_j \vee p_k)$ e $\sigma(p_i) = p_0$, $\sigma(p_j) = p_1$, $\sigma(p_k) = p_0$. Vale un'osservazione analoga alla precedente.

Esercizio 3.5.2 Il rimpiazzamento trasforma sempre tautologie in tautologie?

No. Ad esempio, rimpiazzando la prima occorrenza di p_0 con p_1 in $p_0 \vee \neg p_0$ otteniamo $p_1 \vee \neg p_0$ che non è una tautologia.

3.6 Conseguenza logica

Esercizio 3.6.1 Si dimostri che nell'algebra di Boole vale:

1. $(x \vee y) \wedge (\neg x \vee z) \leq z \vee y$,

2. $(z \vee y) \wedge (\neg y \vee w) \leq z \vee w$,

3. $((x \vee y) \wedge (\neg x \vee z)) \wedge (\neg y \vee w) \leq (z \vee y) \wedge (\neg y \vee w) \leq z \vee w$.

Si concluda che $p_0 \vee p_1, p_0 \to p_2, p_1 \to p_3 \models p_2 \vee p_3$.

1. In generale $a = (a \vee b) \wedge (a \vee \neg b)$, quindi

$$(y \vee z \vee x) \wedge (y \vee z \vee \neg x) = y \vee z.$$

Ovviamente $y \vee x \leq y \vee z \vee x$ e $\neg x \vee z \leq y \vee z \vee \neg x$, quindi

$$(y \vee x) \wedge (\neg x \vee z) \leq (y \vee z \vee x) \wedge (y \vee z \vee \neg x) = y \vee z.$$

Infatti, applicando due volte il teorema 2.4.3 si dimostra

$$a \leq b \text{ e } a' \leq b' \text{ implica } a \wedge a' \leq b \wedge b'.$$

2. Si dimostra come il punto precedente.
3. Per il teorema 2.4.3 dal punto 1) otteniamo

$$(x \vee y) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee w) \leq (z \vee y) \vee (\neg y \vee w)$$

da cui si ottiene per transitività, sfruttando la 2),

$$(x \vee y) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg y \vee w) \leq z \vee w,$$

che è ciò che occorre per giustificare $p_0 \vee p_1, p_0 \to p_2, p_1 \to p_3 \models p_2 \vee p_3$.

Esercizio 3.6.2 Si dimostri che

1. $\alpha \wedge \neg\alpha \models \beta$,

2. $\alpha \models \beta \vee \neg\beta$, *3.* se $\alpha \vee \neg\alpha \models \beta$ allora β è una tautologia e se $\alpha \models \beta \wedge \neg\beta$ allora α è una contraddizione.

1. Basta osservare che $x \wedge \neg x \leq y$, dato che $x \wedge \neg x = 0$.
2. Basta osservare che $x \leq y \vee \neg y$, dato che $y \vee \neg y = 1$.
3. Poiché per ipotesi $M(\alpha \vee \neg\alpha) \subseteq M(\beta)$ e inoltre $M(\alpha \vee \neg\alpha) = 1$, deve essere $1 \leq M(\beta)$ e quindi $M(\beta) = 1$, ossia β è una tautologia. La seconda parte si dimostra in modo analogo, ricordando che $M(\alpha \wedge \neg\alpha) = 0$.

Esercizio 3.6.3 Verificare se la conseguenza logica sussiste:

1. $p_0 \to p_1 \models p_0 \wedge p_1$

2. $p_0 \to (p_1 \to p_2), p_0 \to p_1 \models p_0 \to p_2$

3. $p_0 \to \neg p_1, \neg p_2, p_1 \to (p_0 \vee p_2) \models \neg p_1$

4. $(p_0 \to p_1) \vee (p_0 \wedge \neg p_1) \models p_0$

5. $p_0 \vee p_1, p_2 \leftrightarrow p_3, \neg p_0 \wedge p_3 \models \neg p_3 \vee \neg p_1$

6. $\neg p_0 \wedge p_1, p_0 \vee \neg p_2, p_3 \to \neg p_1 \models p_2 \wedge \neg p_3$.

1. La conseguenza logica non sussiste. È possibile trovare una ν che rende vere le premesse e falsa la conclusione. Se $\nu(0) = 0$ e $\nu(1) = 1$, allora Val_ν assegna a $p_0 \to p_1$ il valore 1 e a $p_0 \wedge p_1$ il valore 0.

2. La conseguenza logica sussiste perché possiamo dimostrare che

$$(\neg x \vee (\neg y \vee z)) \wedge (\neg x \vee y) \leq \neg x \vee z.$$

Per la distributività possiamo ridurci a dimostrare

$$\neg x \vee ((\neg y \vee z) \wedge y) \leq \neg x \vee z.$$

Per la monotonia (teorema 2.4.3) possiamo ridurci a dimostrare

$$(\neg y \vee z) \wedge y \leq z.$$

Ma ciò è evidente dato che $(\neg y \vee z) \wedge y = (\neg y \wedge y) \vee (\neg y \wedge z) = \neg y \wedge z \leq z$, utilizzando la distributività e il fatto che $\neg y \wedge y$ è il minimo.

3. La conseguenza logica sussiste perché possiamo dimostrare che

$$(\neg x \vee \neg y) \wedge \neg z \wedge (\neg y \vee (x \vee z)) \leq \neg y.$$

Innanzitutto osserviamo che $a \leq b$ sse $\neg b \leq \neg a$. Infatti $a \wedge b = a$ sse $\neg(a \wedge b) = \neg a$ sse $\neg a \vee \neg b = \neg a$ (per De Morgan) sse $\neg b \leq \neg a$. Possiamo quindi ridurci a dimostrare

$$y \leq (x \wedge y) \vee z \vee (y \wedge \neg x \wedge \neg z)$$

utilizzando le leggi di De Morgan e la doppia negazione. Osserviamo ora che

$$\begin{aligned}(x \wedge y) \vee z \vee (y \wedge \neg x \wedge \neg z) &= z \vee (y \wedge (x \vee (\neg x \wedge \neg z)) \\ &= z \vee (y \wedge (x \vee \neg z)) \\ &= (z \vee y) \wedge (z \vee x \vee \neg z) \\ &= z \vee y \\ &\geq y.\end{aligned}$$

4. La conseguenza logica non sussiste. È possibile trovare una ν che rende vere le premesse e falsa la conclusione. Se $\nu(0) = 0$ allora Val_ν assegna a $p_0 \to p_1$ e quindi anche a $(p_0 \to p_1) \vee (p_0 \wedge \neg p_1)$ il valore 1, mentre a p_0 spetta il valore 0.

5. La conseguenza logica non sussiste. È possibile trovare una ν che rende vere le premesse e falsa la conclusione, basta porre $\nu(0) = 0$ e $\nu(1) = \nu(2) = \nu(3) = 1$.

6. La conseguenza logica non sussiste. È possibile trovare una ν che rende vere le premesse e falsa la conclusione, basta porre $\nu(0) = \nu(2) = \nu(3) = 0$ e $\nu(1) = 1$.

Esercizio 3.6.4 Tradurre le seguenti inferenze nel linguaggio formale individuando un insieme $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$ di premesse e una conclusione α. Verificare se l'inferenza è corretta.

1. Se c'è una perdita nel radiatore, allora l'olio si surriscalda e la pressione dell'olio si abbassa. Se la pressione dell'olio si abbassa i cuscinetti possono essere danneggiati. Quindi se c'è una perdita nel radiatore i cuscinetti possono essere danneggiati.

2. Se fossi colpevole sarei stato a New York al momento del delitto. Se ciò fosse vero, sul mio passaporto dovrebbe esserci un visto d'ingresso negli Stati Uniti. Ma non è così, quindi non sono colpevole.

3. O le impronte appartengono all'indiziato oppure l'indiziato portava guanti. Le impronte non appartengono all'indiziato, quindi l'indiziato portava guanti.

1. La prima inferenza si può rappresentare con

$$p_0 \to p_1 \wedge p_2, p_2 \to p_3 \models p_0 \to p_3.$$

Per dimostrare la correttezza dell'inferenza basta verificare che

$$(\neg x \vee (y \wedge z)) \wedge (\neg z \vee w) \leq \neg x \vee w.$$

Per la distributività possiamo ridurci a dimostrare

$$(\neg x \vee y) \wedge (\neg x \vee z) \wedge (\neg z \vee w) \leq \neg x \vee w.$$

Se dimostriamo che $(\neg x \vee z) \wedge (\neg z \vee w) \leq \neg x \vee w$ il risultato si ottiene immediatamente dal fatto che $a \leq b$ implica $c \wedge a \leq b$. Osserviamo ora che

$$(\neg x \vee w \vee z) \wedge (\neg x \vee w \vee \neg z) = \neg x \vee w$$

e che da $\neg x \vee z \leq \neg z \vee w \vee z$ e $w \vee \neg z \leq \neg x \vee w \vee \neg z$ segue

$$(\neg x \vee z) \wedge (w \vee \neg z) \leq (\neg x \vee w \vee z) \wedge (\neg x \vee w \vee \neg z).$$

2. La seconda inferenza si può rappresentare con

$$p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, \neg p_2 \models \neg p_0.$$

Per dimostrare la correttezza dell'inferenza basta verificare che

$$(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \vee z) \wedge \neg z \leq \neg x$$

e poiché $(\neg y \vee z) \wedge \neg z = (\neg y \wedge \neg z) \vee (z \wedge \neg z) = \neg y \wedge \neg z$, possiamo ridurci a

$$(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \wedge \neg z) \leq \neg x.$$

Per la distributività $(\neg x \vee y) \wedge (\neg y \wedge \neg z) = (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) \vee (y \wedge \neg y \wedge \neg z) = \neg x \wedge \neg y \wedge \neg z \leq \neg x$.

3. La seconda inferenza si può rappresentare con

$$p_0 \vee p_1, \neg p_0 \models p_1.$$

Per dimostrare la correttezza dell'inferenza basta verificare che

$$(x \vee y) \wedge \neg x \leq y.$$

Infatti $(x \vee y) \wedge \neg x = (x \wedge \neg x) \vee (y \wedge \neg x) = y \wedge \neg x \leq y$.

Esercizio 3.6.5 Si individuino tra le seguenti equivalenze quelle valide:

1. non $\models \alpha$ sse $\models \neg\alpha$.

2. $\models \alpha$ implica $\models \beta$ sse $\models \alpha \to \beta$.

3. $\models \alpha$ e $\models \beta$ sse $\models \alpha \wedge \beta$.

4. $\models \alpha$ o $\models \beta$ sse $\models \alpha \vee \beta$.

5. $\models \alpha$ sse $\models \beta$ sse $\models \alpha \leftrightarrow \beta$.

1. L'equivalenza non è valida. Infatti se non $\models \alpha$, ossia se α non è una tautologia, non è detto che $\neg a$ sia una tautologia. Ad esempio, p_0 non è una tautologia, ma nemmeno $\neg p_0$ lo è.

2. L'equivalenza non è valida. Infatti vale $\models p_0$ implica $\models p_1$, ma $p_0 \to p_1$ non è una tautologia. (Si noti che $\models p_0$ implica $\models p_1$ è un'asserzione vera

proprio perché p_0 non è una tautologia, ossia perché $\models p_0$ è un'asserzione falsa e ogni condizionale con un antecedente falso deve essere vero.)

3. L'equivalenza è valida. Infatti $\models \alpha$ e $\models \beta$ sse $M(\alpha) = 1$ e $M(\beta) = 1$ sse $M(\alpha) \cap M(\beta) = 1$ sse $M(\alpha \wedge \beta) = 1$.

4. L'equivalenza non è valida. Vale infatti $\models p_0 \vee \neg p_0$ ma non vale né $\models p_0$ né $\models \neg p_0$.

5. L'equivalenza non è valida. Vale infatti $\models p_0 \leftrightarrow p_0 \vee p_0$, ma né $\models p_0$ né $\models p_0 \vee p_0$.

Esercizio 3.6.6 Si dimostri che $\models$ gode delle proprietà seguenti:

1. Se $\Gamma \models \alpha$ allora $\Gamma, \Delta \models \alpha$.

2. $\Gamma, \alpha \models \beta$ sse $\Gamma \models \alpha \to \beta$.

3. Se $\Gamma, \alpha \models \beta$ e $\Gamma, \neg\alpha \models \beta$ allora $\Gamma \models \beta$.

4. Se $\Gamma, \alpha \models \beta$ e $\Gamma, \alpha \models \neg\beta$ allora $\Gamma \models \neg\alpha$.

5. $\Gamma, \alpha \models \beta$ sse $\Gamma, \neg\beta \models \neg\alpha$.

1. Basta osservare che $M(\Gamma) \subseteq M(\alpha)$ implica $M(\Gamma) \cap M(\Delta) \subseteq M(\alpha)$.

2. Assumiamo $M(\Gamma) \cap M(\alpha) \subseteq M(\beta)$ e dimostriamo che $M(\Gamma) \subseteq -M(\alpha) \cup M(\beta)$. A tale scopo basta verificare che nelle algebre di Boole vale $x \wedge y \leq z$ implica $x \leq \neg y \vee z$, ma questo è il punto 6) del teorema 2.4.5. Assumiamo $M(\Gamma) \subseteq -M(\alpha) \cup M(\beta)$ e dimostriamo che $M(\Gamma) \cap M(\alpha) \subseteq M(\beta)$. A tale scopo basta verificare che nelle algebre di Boole vale $x \leq \neg y \vee z$ implica $x \wedge y \leq z$, ma questo è il punto 6) del teorema 2.4.5.

3. Basta verificare che nelle algebre di Boole vale $x \wedge y \leq z$ e $x \wedge \neg y \leq z$ implica $x \leq z$. Infatti

$$\begin{array}{rcl} x & = & x \wedge (y \vee \neg y) \\ & = & (x \wedge y) \vee (x \wedge \neg y) \\ & \leq & z \vee z \\ & = & z \end{array}$$

dove la terza è ottenuta sfruttando le ipotesi e la monotonia.

4. Basta verificare che nelle algebre di Boole vale $x \wedge y \leq z$ e $x \wedge y \leq \neg z$ implica $x \leq \neg y$. Nel punto 3) dell'esercizio 3.6.3 abbiamo mostrato che $a \leq b$ sse $\neg b \leq \neg a$, quindi dalla seconda ipotesi segue, utilizzando la doppia negazione e De Morgan, $z \leq \neg x \vee \neg y$. Dalla prima ipotesi otteniamo, mediante la transitività e il punto 6) del teorema 2.4.5,

$$\begin{array}{rcl} x \wedge y & \leq & \neg x \vee \neg y \\ x \wedge y \wedge x & \leq & \neg y \\ x \wedge y & \leq & \neg y \\ x & \leq & \neg y \vee \neg y \\ x & \leq & \neg y. \end{array}$$

5. Basta verificare che nelle algebre di Boole vale $x \wedge y \leq z$ sse $x \wedge \neg z \leq \neg y$. Utilizzando la doppia negazione e il punto 6) del teorema 2.4.5 abbiamo $x \wedge y \leq z$ sse $x \leq \neg y \vee z$ sse $x \leq \neg\neg z \vee \neg y$ sse $x \wedge \neg z \leq \neg y$.

Esercizio 3.6.7 Si dimostri che Γ assiomatizza la teoria T sse $M(\Gamma) = M(T)$.

Per definizione Γ assiomatizza T sse $Cn(\Gamma) = T$. Per il teorema 3.6.3 vale $M(\Gamma) = M(Th(M(\Gamma)))$. Per il teorema 3.6.4, $Cn(\Gamma) = Th(M(\Gamma))$. Quindi se Γ assiomatizza T allora $M(\Gamma) = M(Cn(\Gamma)) = M(T)$. Se $M(\Gamma) = M(T)$ allora $Cn(\Gamma) = Th(M(\Gamma)) = Th(M(T)) = Cn(T) = T$, dove l'ultimo passaggio è dovuto al fatto che T è una teoria e quindi un punto fisso di Cn.

3.7 Calcoli di sequenti

Esercizio 3.7.1 Si dimostri che:

1. $\alpha \wedge \beta \vdash \beta \wedge \alpha$ e $\alpha \vee \beta \vdash \beta \vee \alpha$ (commutatività),

2. $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \vdash (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$ e $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \vdash (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$ (distributività)

3. $\alpha, \alpha \to \beta \vdash \beta$ (modus ponens),

4. $\alpha \vdash \neg\neg\alpha$ (introduzione della doppia negazione),

5. $\neg(\alpha \wedge \beta) \vdash \neg\alpha \vee \neg\beta$ e $\neg(\alpha \vee \beta) \vdash \neg\alpha \wedge \neg\beta$ (leggi di De Morgan),

6. $(\alpha \wedge \neg\alpha) \vee \beta \vdash \beta$,

7. $\neg\alpha \vee \beta, \alpha \vee \gamma \vdash \beta \vee \gamma$.

1. Commutatività.

$$\frac{\alpha \wedge \beta : \beta \qquad \alpha \wedge \beta : \alpha}{\alpha \wedge \beta : \beta \wedge \alpha}$$

In modo analogo si dimostra la commutatività di $\vee$.

2. Distributività di $\vee$ sua $\wedge$. Indichiamo con Π_0 la dimostrazione

$$\frac{\alpha : \alpha \vee \beta \qquad \dfrac{\beta \wedge \gamma : \beta \quad \beta : \alpha \vee \beta}{\beta \wedge \gamma : \alpha \vee \beta}}{\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) : \alpha \vee \beta}$$

e con Π_1 la dimostrazione

$$\frac{\alpha : \alpha \vee \gamma \qquad \dfrac{\beta \wedge \gamma : \gamma \quad \gamma : \alpha \vee \gamma}{\beta \wedge \gamma : \alpha \vee \gamma}}{\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) : \alpha \vee \gamma}$$

Con un'applicazione della regola $\vdash \wedge$ otteniamo

$$\frac{\Pi_0 \quad \Pi_1}{\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) : (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)}$$

Distributività di $\wedge$ su $\vee$. Indichiamo con Π_0 la dimostrazione

$$\frac{\dfrac{\alpha, \beta : \alpha \quad \alpha, \beta : \beta}{\alpha, \beta : \alpha \wedge \beta}}{\alpha, \beta : (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)}$$

e con Π_1 la dimostrazione

$$\frac{\dfrac{\alpha, \gamma : \alpha \quad \alpha, \gamma : \gamma}{\alpha, \gamma : \alpha \wedge \gamma}}{\alpha, \gamma : (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)}$$

Abbiamo allora

$$\frac{\dfrac{\Pi_0 \quad \Pi_1}{\alpha, (\beta \vee \gamma) : (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)}}{\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) : (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)}$$

dove l'ultimo passaggio si ottiene con un'applicazione della regola di introduzione di $\wedge$ nell'antecedente giustificata nell'esercizio seguente.

3. Modus ponens.

$$\frac{\dfrac{\alpha \wedge \neg\alpha : \beta}{\alpha, \neg\alpha : \beta} \quad \alpha, \beta : \beta}{\alpha, \neg\alpha \vee \beta : \beta}$$

dove l'eliminazione di $\wedge$ nella seconda riga è giustificata dalla regola convalidata nel teorema 3.7.3.

4. Introduzione della doppia negazione.

$$\frac{\alpha : \neg\alpha \vee \neg\neg\alpha \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \alpha, \neg\alpha \vee \neg\neg\alpha : \neg\neg\alpha \end{array}}{\alpha : \neg\neg\alpha}$$

dove i puntini indicano la presenza di una dimostrazione dell'applicazione di modus ponens contenuta nella riga sottostante, analoga a quella del punto 3) precedente.

5. Prima legge di De Morgan. Indichiamo con Π_0 la seguente dimostrazione:

$$\frac{\dfrac{\neg\alpha : \neg\alpha \vee \neg\beta}{\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) : \neg\neg\alpha} \quad \begin{array}{c} \vdots \\ \neg\neg\alpha : \alpha \end{array}}{\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) : \alpha}$$

dove il passaggio da $\neg\alpha : \neg\alpha \vee \neg\beta$ a $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) : \neg\neg\alpha$ è ottenuto per contrapposizione (teorema 3.7.9) e dove i puntini indicano la giustificazione della legge di introduzione della doppia negazione, presentata nel punto 2) del teorema 3.7.8. Indichiamo con Π_1 una dimostrazione analoga di $\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) : \beta$. Abbiamo allora

$$\dfrac{\dfrac{\Pi_0 \qquad \Pi_1}{\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) : \alpha \wedge \beta} \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \neg\neg\alpha : \alpha\end{matrix}}{\dfrac{\neg(\alpha \wedge \beta) : \neg\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) \qquad \neg\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta) : \neg\alpha \vee \neg\beta}{\neg(\alpha \wedge \beta) : \neg\alpha \vee \neg\beta}}$$

Seconda legge di De Morgan.

$$\dfrac{\dfrac{\alpha : \alpha \vee \beta \qquad \beta : \alpha \vee \beta}{\neg(\alpha \vee \beta) : \neg\alpha \qquad \neg(\alpha \vee \beta) : \neg\beta}}{\neg(\alpha \vee \beta) : \neg\alpha \wedge \neg\beta}$$

6.

$$\dfrac{\alpha \wedge \neg\alpha : \beta \qquad \beta : \beta}{(\alpha \wedge \neg\alpha) \vee \beta : \beta}$$

7. Sia Π_0 la dimostrazione seguente:

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots \\ \neg\alpha \vee \beta, \alpha : \beta\end{matrix} \qquad \beta : \beta \vee \gamma}{\neg\alpha \vee \beta, \alpha : \beta \vee \gamma}$$

dove i puntini indicano la giustificazione dell'applicazione di modus ponens sottostante. Indichiamo con Π_1 la dimostrazione seguente:

$$\dfrac{\neg\alpha \vee \beta, \gamma : \gamma \qquad \gamma : \beta \vee \gamma}{\neg\alpha \vee \beta, \gamma : \beta \vee \gamma}$$

Abbiamo allora

$$\dfrac{\Pi_0 \qquad \Pi_1}{\neg\alpha \vee \beta, \alpha \vee \gamma : \beta \vee \gamma}$$

Esercizio 3.7.2 Si dimostri che le regole
$\dfrac{\Gamma, \alpha, \beta : \gamma}{\Gamma, \alpha \wedge \beta : \gamma}$ e $\dfrac{\Gamma, \neg\beta : \neg\alpha}{\Gamma, \alpha : \beta}$
sono regole derivate.

1.

$$\dfrac{\Gamma, \alpha \wedge \beta : \beta \qquad \dfrac{\Gamma, \alpha \wedge \beta : \alpha \qquad \begin{matrix}\vdots \\ \Gamma, \alpha, \beta : \gamma\end{matrix}}{\Gamma, \alpha \wedge \beta, \beta : \gamma}}{\Gamma, \alpha \wedge \beta : \gamma}$$

2.

$$\dfrac{\begin{matrix}\vdots\\ \alpha : \neg\neg\alpha\end{matrix} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\Gamma, \neg\beta : \neg\alpha}}{\Gamma, \neg\neg\alpha : \neg\neg\beta} \qquad \begin{matrix}\vdots\\ \neg\neg\beta : \beta\end{matrix}}{\Gamma, \neg\neg\alpha : \beta}}{\Gamma, \alpha : \beta}$$

dove i puntini sopra $\alpha : \neg\neg\alpha$ stanno per la dimostrazione fornita al punto 4), mentre i puntini sopra $\neg\neg\beta : \beta$ stanno per la dimostrazione fornita al punto 2) del teorema 3.7.8.

Esercizio 3.7.3 Si dimostri che $(\rightarrow\vdash)$ e $(\vdash\rightarrow)$ sono regole logiche.

1. Mostriamo che se $\Gamma \models \alpha$ allora $\Gamma, \neg\alpha \vee \beta \models \beta$. A tale scopo basta dimostrare che nelle algebre di Boole vale

$$x \leq y \text{ implica } x \wedge (\neg y \vee z) \leq z.$$

Per ipotesi $x \wedge y = x$ e quindi

$$\begin{aligned} x \wedge (\neg y \vee z) &= (x \wedge \neg y) \vee (x \wedge z) \\ &= (x \wedge y \wedge \neg y) \vee (x \wedge z) \\ &= x \wedge z \\ &\leq z. \end{aligned}$$

2. Mostriamo che se $\Gamma, \alpha \models \beta$ allora $\Gamma \models \neg\alpha \vee \beta$. A tale scopo basta dimostrare che nelle algebre di Boole vale

$$x \wedge y \leq z \text{ implica } x \leq \neg y \vee z.$$

Per ipotesi $z = (x \wedge y) \vee z$ e quindi

$$\begin{aligned} \neg y \vee z &= \neg y \vee (x \wedge y) \vee z \\ &= ((\neg y \vee x) \wedge (\neg y \vee y)) \vee z \\ &= \neg y \vee x \vee z \\ &\geq x. \end{aligned}$$

Esercizio 3.7.4 Si dimostri per induzione sull'altezza della dimostrazione che $\Gamma \vdash \alpha$ implica $\Gamma(p_i/\beta) \vdash \alpha(p_i/\beta)$, dove $\Gamma(p_i/\beta)$ indica l'insieme di formule ottenuto sostituendo p_i con β in ogni formula di Γ. Si può quindi concludere che $\emptyset \vdash \alpha$ implica $\emptyset \vdash \alpha(p_i/\beta)$. Si dimostri con un controesempio che $\Gamma \vdash \alpha$ non implica $\Gamma \vdash \alpha(p_i/\beta)$. (Si utilizzi il teorema di validità per dimostrare l'inderivabilità.)

Per semplificare la notazione scriviamo α' invece di $\alpha(p_i/\beta)$. La dimostrazione è per induzione sull'altezza della dimostrazione di $\Gamma : \alpha$. Se la dimostrazione ha altezza 1 allora è costituita solo da un assioma. Se è un assioma d'identità allora $\alpha \in \Gamma$ e quindi anche $\Gamma' : \alpha'$ è un assioma d'identità poiché $\alpha' \in \Gamma'$. Quindi $\Gamma' \vdash \alpha'$. Se è un assioma di tipo $(\wedge \vdash)_0$ allora è $\beta \wedge \alpha : \alpha$, ma allora anche $(\beta \wedge \alpha)' : \alpha'$ è un assioma dello stesso tipo poiché $(\beta \wedge \alpha)' = \beta' \wedge \alpha'$. Quindi $(\beta \wedge \alpha)' \vdash \alpha'$. Nello stesso modo si procede con gli altri assiomi. Supponiamo ora che $\Gamma : \alpha$ sia stato ottenuto con una dimostrazione di altezza $n + 1$. In particolare supponiamo che sia stato ottenuto con una regola di tipo $(\vdash \wedge)$, allora $\Gamma : \alpha$ è $\Gamma : \alpha_0 \wedge \alpha_1$ e inoltre esistono due dimostrazioni di altezza minore o uguale a n tali che $\Gamma \vdash \alpha_0$ e $\Gamma \vdash \alpha_1$. Per ipotesi induttiva $\Gamma' \vdash \alpha_0'$ e $\Gamma' \vdash \alpha_1'$ e quindi con un'applicazione della stessa regola si ottiene una dimostrazione di $\Gamma' : \alpha_0' \wedge \alpha_1'$. Poiché $(\alpha_0 \wedge \alpha_1)' = \alpha_0' \wedge \alpha_1'$ possiamo concludere che $\Gamma' \vdash (\alpha_0 \wedge \alpha_1)'$. Nello stesso modo si procede con le altre regole.

Per dimostrare che $\Gamma \vdash \alpha$ non implica $\Gamma \vdash \alpha(p_i/\beta)$ basta osservare che vale $p_0 \vdash p_0$ mentre $p_0 \vdash p_0(p_0/p_1)$, ossia $p_0 \vdash p_1$, è falso. Infatti se valesse $p_0 \vdash p_1$ per il teorema di validità avremmo $p_0 \models p_1$, ma $p_0 \not\models p_1$ e quindi $p_0 \nvdash p_1$.

3.8 Saturazione

Esercizio 3.8.1 Sia Γ un insieme saturo. Si dimostri per induzione che, per ogni α, Γ non contiene α e $\neg\alpha$. Si dimostri quindi che, sostituendo nella definizione di saturazione l'ultima clausola con la richiesta che Γ non contenga α e $\neg\alpha$, per ogni formula α, si ottiene una nozione di saturazione equivalente.

Se α è una variabile p_i allora Γ non può contenere p_i e $\neg p_i$ perché è saturo. Se α è una congiunzione $\beta \wedge \gamma$ mostriamo che Γ non può contenere $\beta \wedge \gamma$ e $\neg(\beta \wedge \gamma)$. Se contenesse entrambe allora, essendo saturo, dovrebbe contenere β, γ e dovrebbe contenere o $\neg\beta$ oppure $\neg\gamma$. Ma allora conterrebbe o la coppia $\beta, \neg\beta$ oppure la coppia γ, $\neg\gamma$: ma per ipotesi induttiva ciò è impossibile. Se α è una disgiunzione $\beta \vee \gamma$ dimostriamo che Γ non può contenere $\beta \vee \gamma$ e $\neg(\beta \vee \gamma)$. Se contenesse entrambe dovrebbe contenere la coppia $\neg\beta$, $\neg\gamma$ e dovrebbe contenere o β o γ. Ma allora conterrebbe o la coppia $\beta, \neg\beta$ oppure la coppia γ, $\neg\gamma$: ma per ipotesi induttiva ciò è impossibile. Se α è una negazione $\neg\beta$ dimostriamo che Γ non può contenere $\neg\beta$ e $\neg\neg\beta$. Se Γ contenesse $\neg\neg\beta$ dovrebbe contenere anche β e quindi conterrebbe la coppia β, $\neg\beta$, ma ciò è impossibile per ipotesi induttiva.

Se ridefiniamo il concetto di saturazione sostituendo la clausola 6) con la clausola 6') in cui si chiede che per ogni formula α l'insieme Γ non contenga α e $\neg\alpha$ otteniamo un concetto di saturazione equivalente al precedente. Infatti è evidente che se Γ è saturo in questa nuova accezione lo anche nella vecchia accezione, dato che 6') implica immediatamente 6). Supponiamo ora che Γ sia saturo nella vecchia accezione. Per quanto abbiamo visto sopra la 6'), anche se più debole della 6), implica la 6) con l'aiuto delle altre clausole della definizione di saturazione. Quindi Γ è saturo anche nella nuova accezione.

Esercizio 3.8.2 Si verifichi se gli insiemi seguenti sono soddisfacibili e, in caso positivo, si fornisca un modello:

1. $\{p_0 \wedge p_1 \to p_2,\ \neg p_2,\ p_0 \vee p_1\}$,
2. $\{p_0 \wedge p_1 \to p_2,\ p_0 \wedge \neg p_1 \to p_2,\ \neg p_2,\ p_0\}$,
3. $\{p_0, p_0 \to p_1,\ p_1 \to p_2, ..., p_i \to p_{i+1} \cdots\}$,
4. $\{p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, ..., p_i \to p_{i+1}, p_{i+1} \to p_0\}$,
5. $\{\neg p_0, p_0 \to p_1, p_1 \to p_2, ..., p_i \to p_{i+1}, p_{i+1} \to p_0\}$.

1. $\nu(0) = 0$, $\nu(1) = 1$, $\nu(2) = 0$.

2. Non è soddisfacibile. Se lo fosse dovrebbe esistere un ν tale che $\nu(0) = 1$ e $\nu(2) = 0$ che renda vere p_0 e $\neg p_2$. Inoltre ν dovrebbe rendere vera $p_0 \wedge p_1 \to p_2$: poiché sappiamo che ν falsifica il conseguente, dovrà rendere falso l'antecedente ossia la congiunzione $p_0 \wedge p_1$. Poiché ν rende vera p_0 occorre chiedere che sia $\nu(1) = 0$. Ma le condizioni che abbiamo poste su ν sono tali che ν falsifica $p_0 \wedge \neg p_1 \to p_2$.

3. $\nu(i) = 1$ per ogni $i \in \omega$.

4. $\nu(n) = 1$ per ogni $n \leq i + 1$.

5. $\nu(n) = 0$ per ogni $n \leq i + 1$.

3.9 Completezza

Esercizio 3.9.1 Si dimostri che:

1. Se Γ è coerente massimale allora è $\vdash$-chiuso, ossia $\Gamma \vdash \alpha$ implica $\alpha \in \Gamma$.
2. Γ è coerente sse esiste α tale che $\Gamma \nvdash \alpha$.
3. Se Γ è coerente e completo allora è anche coerente massimale, e viceversa.
4. Se Γ è soddisfacibile allora è incluso in un insieme saturo.
5. Se Γ è completo e soddisfacibile (e quindi anche se è completo e coerente o completo e saturo o coerente massimale), allora Γ è una teoria. Si dimostri con un controesempio che se Γ è completo non è detto che sia una teoria.

1. Se esistesse α tale che $\Gamma \vdash \alpha$ e $\alpha \notin \Gamma$ allora $\Gamma \cup \{\alpha\}$ sarebbe un soprainsieme proprio coerente di Γ, il che è assurdo. ($\Gamma \cup \{\alpha\}$ è coerente perché se esistesse β tale che $\Gamma, \alpha \vdash \beta$ e $\Gamma, \alpha \vdash \neg\beta$ allora per reductio avremmo $\Gamma \vdash \neg\alpha$ e quindi Γ sarebbe incoerente, contro l'ipotesi.)

2. Se fosse $\Gamma \vdash \alpha$ per ogni α, allora evidentemente Γ sarebbe incoerente: quindi se Γ è coerente deve esistere qualche formula indimostrabile da Γ. Se Γ è incoerente e quindi esiste α tale che $\Gamma \vdash \alpha$ e $\Gamma \vdash \neg\alpha$ allora $\Gamma \vdash \alpha \wedge \neg\alpha$ e ogni formula β è dimostrabile da Γ sfruttando l'ex falso: quindi se esistono formule indimostrabili da Γ allora Γ è coerente.

3. Se Γ è coerente e completo allora è anche coerente massimale. Supponiamo che esista un Γ' coerente tale che $\Gamma \subset \Gamma'$ e consideriamo $\alpha \in \Gamma' - \Gamma$. Poiché Γ è completo varrà $\alpha \in \Gamma$o $\neg\alpha \in \Gamma$, ma $\alpha \notin \Gamma$ quindi $\neg\alpha \in \Gamma$. Ma allora Γ' è incoerente, contro l'ipotesi. Se Γ è coerente massimale allora è coerente e completo. Per ipotesi Γ è coerente. Se non fosse completo per qualche α avremmo $\alpha \notin \Gamma$ e $\neg\alpha \notin \Gamma$. Poiché Γ è coerente massimale sia $\Gamma \cup \{\alpha\}$ sia $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ sono incoerenti e quindi, per reductio, avremmo sia $\Gamma \vdash \neg\alpha$ sia $\Gamma \vdash \neg\neg\alpha$ e quindi $\Gamma \vdash \alpha$ attraverso l'eliminazione della doppia negazione. Ma allora Γ sarebbe incoerente, il che è assurdo.

4. Se Γ è soddisfacibile allora Γ ha un modello e quindi è coerente. (Se dimostrasse una contraddizione α e $\neg\alpha$ entrambe le formule dovrebbero essere vere in questo modello, per il teorema di validità, ma nessun modello può rendere vera una formula e la sua negazione.) Se Γ è coerente esiste un Γ' coerente e massimale tale che $\Gamma \subseteq \Gamma'$ per il teorema di Lindenbaum. Ma Γ' è anche coerente e completo, per quanto abbiamo appena dimostrato, e quindi è anche saturo, per il teorema 3.9.2.

5. Completo e soddisfacibile implica completo e coerente (perché soddisfacibile implica coerente) che a sua volta implica coerente massimale (punto 3) che a sua volta implica $\vdash$-chiuso: quindi Γ è una teoria.

Se Γ è completo non è detto che sia una teoria: basta considerare l'insieme di formule $Fm - \{\alpha\}$: è un insieme completo (incoerente) da cui si dimostra ovviamente α, ma non contiene α e quindi non è una teoria.

Esercizio 3.9.2 Usando i teoremi di validità e di completezza si dimostri che:

1. Ogni regola logica è una regola derivata.

2. $\emptyset$ è coerente.

3. Se Γ è una teoria, $\Gamma \vdash \alpha$ sse $\alpha \in \Gamma$.

1. Se ρ è una regola logica allora ogni sua applicazione $(\sigma_0, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma)$ è tale che se tutti i σ_i sono sequenti validi anche σ è un sequente valido. Supponiamo ora che tutti i σ_i siano sequenti dimostrabili, allora per il teorema di validità sono tutti sequenti validi e quindi, essendo ρ una regola logica, anche σ è un sequente valido, ma allora σ è un sequente dimostrabile per il teorema di completezza: quindi ρ è una regola derivata.

2. Se valesse $\emptyset \vdash \alpha$ e $\emptyset \vdash \neg\alpha$ allora varrebbe sia $\models \alpha$ sia $\models \neg\alpha$, per il teorema di validità, il che è assurdo.

3. Un insieme Γ è una teoria sse per ogni formula α vale $\Gamma \models \alpha$ implica $\alpha \in \Gamma$. Supponiamo che Γ sia una teoria e che $\Gamma \vdash \alpha$, allora per il teorema di validità $\Gamma \models \alpha$ e quindi $\alpha \in \Gamma$. Ovviamente, se $\alpha \in \Gamma$ vale $\Gamma \vdash \alpha$ (anche se Γ non è una teoria).

Esercizio 3.9.3 Si dimostri che $\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ implica $\Gamma \vdash \gamma(p_i/\alpha) \leftrightarrow \gamma(p_i/\beta)$. (Si può dimostrare che $\Gamma \models \alpha \leftrightarrow \beta$ implica $\Gamma \models \gamma(p_i/\alpha) \leftrightarrow \gamma(p_i/\beta)$ e quindi utilizzare i teoremi di validità e di completezza, oppure si può dare una dimostrazione puramente sintattica, procedendo per induzione su γ.)

1. Per semplificare la notazione, per ogni formula δ poniamo $\delta(p_i/\alpha) = \delta'$ e $\delta(p_i/\beta) = \delta''$, quindi ciò che dobbiamo dimostrare è $\Gamma \vdash \gamma' \leftrightarrow \gamma''$. La dimostrazione è per induzione sulla complessità di γ. Base dell'induzione, γ è una variabile. Se $\gamma \neq p_i$ allora $\gamma' = \gamma$ e $\gamma'' = \gamma$ e quindi non c'è nulla da dimostrare dato che $\vdash \gamma \leftrightarrow \gamma$. Se γ è proprio p_i allora $\gamma' = \alpha$ e $\gamma'' = \beta$ e $\Gamma \vdash \gamma' \leftrightarrow \gamma''$ scende dall'ipotesi $\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$. Posso induttivo. Caso 1, $\gamma = \neg\delta$. Dobbiamo dimostrare $\Gamma \vdash (\neg\delta)' \leftrightarrow (\neg\delta)''$ ossia $\Gamma \vdash \neg\delta' \leftrightarrow \neg\delta''$. Per ipotesi induttiva $\Gamma \vdash \delta' \leftrightarrow \delta''$ e di qui l'asserto per contrapposizione e per le regole su $\wedge$. Caso 2, $\gamma = \delta \wedge \varepsilon$. Dobbiamo dimostrare $\Gamma \vdash \delta' \wedge \varepsilon' \leftrightarrow \delta'' \wedge \varepsilon''$. Per ipotesi induttiva valgono $\Gamma \vdash \delta' \leftrightarrow \delta''$ e $\Gamma \vdash \varepsilon' \leftrightarrow \varepsilon''$. Si vede facilmente che $\Gamma, \delta' \wedge \varepsilon' \vdash \delta''$, usando gli assiomi di $\wedge$, il taglio, le regole di $\rightarrow$ e le ipotesi induttive. In modo analogo si dimostra che $\Gamma, \delta' \wedge \varepsilon' \vdash \varepsilon''$. Di qui $\Gamma, \delta' \wedge \varepsilon' \vdash \delta'' \wedge \varepsilon''$ mediante la regola di introduzione di $\wedge$ nel conseguente e quindi $\Gamma \vdash \delta' \wedge \varepsilon' \rightarrow \delta'' \wedge \varepsilon''$ mediante la regola di introduzione di $\rightarrow$ nel conseguente. L'altra implicazione si dimostra in modo analogo. Caso 3, $\gamma = \delta \vee \varepsilon$. La dimostrazione è simile a quella del caso precedente.

2. Innanzitutto dimostriamo una generalizzazione del corollario 3.5.4: $\Gamma \models \alpha \leftrightarrow \beta$ implica $\Gamma \models \gamma(p_i/\alpha) \leftrightarrow \gamma(p_i/\beta)$. La dimostrazione è per induzione su γ. Se γ è una variabile distinguiamo due casi: γ è differente da p_i e allora $\gamma' = \gamma''$ e quindi non c'è nulla da dimostrare, oppure γ è p_j e allora per ipotesi vale $\Gamma \models \gamma' \leftrightarrow \gamma''$. Se γ è $\neg\delta$ allora per ipotesi induttiva $\Gamma \models \delta' \leftrightarrow \delta''$ e quindi $\Gamma \models \neg\delta' \leftrightarrow \neg\delta''$ ossia $\Gamma \models \gamma' \leftrightarrow \gamma''$. Se γ è $\delta \wedge \varepsilon$ allora per ipotesi induttiva $\Gamma \models \delta' \leftrightarrow \delta''$ e $\Gamma \models \varepsilon' \leftrightarrow \varepsilon''$ e quindi $\Gamma, \delta' \wedge \varepsilon' \models \delta''$ e $\Gamma, \delta' \wedge \varepsilon' \models \varepsilon''$ da cui $\Gamma \models \gamma' \rightarrow \gamma''$. Analogamente si dimostra che $\Gamma \models \gamma'' \rightarrow \gamma'$. Quando γ è $\delta \vee \varepsilon$ si procede in modo analogo. Dimostriamo ora l'asserto dell'esercizio: se $\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$ allora $\Gamma \models \alpha \leftrightarrow \beta$ per il teorema di validità e quindi $\Gamma \models \gamma' \leftrightarrow \gamma''$ per quanto abbiamo appena dimostrato e infine $\Gamma \vdash \gamma' \leftrightarrow \gamma''$ per il teorema di completezza.

Esercizio 3.9.4 Supponiamo che $\mathcal{L}$ sia numerabile e che quindi esista una biiezione $\theta : \mathcal{L} \rightarrow \omega$.

1. Si dimostri che esiste una funzione $\varphi : Fm \rightarrow \omega$ iniettiva.

2. Si dimostri che esiste una funzione $\psi : \omega \rightarrow Fm$ iniettiva.

3. Si dimostri che $|Fm| = \omega$.

1. Per ogni formula $\alpha = (s_0, ..., s_n)$ poniamo $\varphi(\alpha) = p_0^{\theta(s_0)+1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\theta(s_n)+1}$ dove p_i è l'i-esimo primo.

2. Poniamo $\psi(i) = p_i$.

3. Per il teorema di Schroeder-Bernstein, esercizio 1.6.4, esiste una biiezione tra ω e Fm e quindi i due insiemi hanno la stessa cardinalità.

3.10 Calcoli hilbertiani

Esercizio 3.10.1 Si consideri il seguente calcolo hilbertiano $\mathcal{G}$ per il linguaggio basato su $\neg$ e $\rightarrow$, dovuto a Frege, e si dimostri che $\mathcal{G}$ è equivalente a $\mathcal{F}$. L'unica regola di $\mathcal{G}$ è MP e i suoi assiomi sono tutti gli esempi degli schemi

G1 $\alpha \to \beta \to \alpha$,

G2 $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma)$,

G3 $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to (\beta \to (\alpha \to \gamma))$,

G4 $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$,

G5 $\neg\neg\alpha \to \alpha$,

G6 $\alpha \to \neg\neg\alpha$.

(Per dimostrare K9 in $\mathcal{G}$ si dimostrino nell'ordine i punti 1) e 3) del lemma 3.10.4 e quindi $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$.)

1. Dimostriamo che tutti i teoremi di $\mathcal{G}$ sono teoremi di $\mathcal{F}$: a tale scopo basta dimostrare che $\mathcal{F}$ dimostra tutti gli assiomi di $\mathcal{G}$. Ricordiamo che $\mathcal{F}$ consiste degli assiomi K1, K2, K9, K10 del calcolo di Kleene. Poiché G1=K1, G2=K2, G5=K10, restano da dimostrare in $\mathcal{F}$ gli assiomi G3, G4 e G5. Poiché $\mathcal{F}$ contiene K1 e K2 e l'unica sua regola è MP, anche per $\mathcal{F}$ vale il teorema di deduzione. Quindi per dimostrare G3 in $\mathcal{F}$ basta dimostrare che $\alpha \to (\beta \to \gamma), \beta, \alpha \vdash_{\mathcal{F}} \gamma$, il che è evidente. Per dimostrare G4 in $\mathcal{F}$ basta dimostrare che $\alpha \to \beta, \neg\beta \vdash_{\mathcal{F}} \neg\alpha$, il che si ottiene nel modo seguente:

$$\begin{array}{cc}
\alpha \to \beta & \text{ipotesi} \\
(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha & \text{K9} \\
(\alpha \to \neg\beta) \to \neg\alpha & \text{MP} \\
\neg\beta & \text{ipotesi} \\
\alpha \to \neg\beta & \text{MP} \\
\neg\alpha & \text{MP}
\end{array}$$

Per dimostrare G6 basta dimostrare che $\alpha \vdash_{\mathcal{F}} \neg\neg\alpha$, ciò che si ottiene come segue:

$$\begin{array}{cc}
\alpha & \text{ipotesi} \\
\neg\alpha \to \alpha & \text{K1, MP} \\
\neg\alpha \to \neg\neg\alpha & \text{G4, MP} \\
\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha & \text{K10} \\
(\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to (\neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha) \to \neg\neg\alpha & \text{K9} \\
\neg\neg\alpha & \text{MP}
\end{array}$$

2. Dimostriamo che tutti i teoremi di $\mathcal{F}$ sono teoremi di $\mathcal{G}$. Poiché K1=G1, K2=G2, K10=G5, resta solo da dimostrare K9 in $\mathcal{G}$. Iniziamo col dimostrare

$$\vdash_{\mathcal{G}} (\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha).$$

A tale scopo basta dimostrare che $\neg\alpha \to \neg\beta, \beta \vdash_{\mathcal{G}} \alpha$, dato che in $\mathcal{G}$ vale il teorema di deduzione, e ciò si ricava dalla dimostrazione seguente:

$\neg\alpha \to \neg\beta$	ipotesi
$\neg\neg\beta \to \neg\neg\alpha$	G4, MP
$\beta \to \neg\neg\beta$	G6
$\beta \to \neg\neg\alpha$	MP
$\neg\neg\alpha \to \alpha$	G5
$\beta \to \alpha$	transitività di $\to$.

La transitività di $\to$ si ottiene immediatamente una volta dimostrato il teorema di deduzione. Dimostriamo inoltre che

$$\vdash_{\mathcal{G}} \alpha \to \neg\alpha \to \beta.$$

Per G1 abbiamo $\neg\alpha \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ e poiché $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$, per quanto abbiamo appena dimostrato, ne segue l'asserto per la transitività di $\to$. Siamo ora in grado di dimostrare

$$\vdash_{\mathcal{G}} (\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha.$$

Innanzitutto osserviamo che $\alpha \to \neg\alpha, \alpha \vdash_{\mathcal{G}} \neg\alpha$ e $\alpha \to \neg\alpha, \alpha \vdash_{\mathcal{G}} \alpha$. Sia ξ un teorema qualsiasi del calcolo $\mathcal{G}$, per quanto abbiamo appena dimostrato in $\mathcal{G}$ è teorema $\alpha \to \neg\alpha \to \neg\xi$ e quindi $\alpha \to \neg\alpha, \alpha \vdash_{\mathcal{G}} \neg\xi$. Per il teorema di deduzione $\alpha \to \neg\alpha \vdash_{\mathcal{G}} \alpha \to \neg\xi$. Sfruttando G4 e G6 otteniamo $\alpha \to \neg\alpha \vdash_{\mathcal{G}} \xi \to \neg\alpha$. Poiché ξ è un assioma del calcolo abbiamo $\alpha \to \neg\alpha \vdash_{\mathcal{G}} \neg\alpha$ da cui l'asserto con il teorema di deduzione.

Siamo ora in grado di dimostrare K9. Per il teorema di deduzione possiamo ridurci a dimostrare $\alpha \to \beta, \alpha \to \neg\beta \vdash_{\mathcal{G}} \neg\alpha$ il che si ottiene dalla dimostrazione seguente:

$\alpha \to \neg\beta$	ipotesi
$\beta \to \neg\alpha$	G4, G6, MP
$\alpha \to \beta$	ipotesi
$\alpha \to \neg\alpha$	transitività di $\to$
$(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$	teorema di $\mathcal{G}$
$\neg\alpha$	MP.

Esercizio 3.10.2 Si dimostri che il calcolo hilbertiano ottenuto da $\mathcal{G}$ eliminando G3 e rimpiazzando G4, G5, G6 con $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$, dovuto a J. Łukasiewicz, è equivalente a $\mathcal{G}$.

Sia $\mathcal{L}$ il calcolo di Łukasiewicz in cui L1=G1, L2=G2 e L3=$(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$. Poiché l'unica regola di $\mathcal{L}$ è MP, gli assiomi L1 e L2 permettono di dimostrare il teorema di deduzione.

1. Tutti i teoremi di $\mathcal{L}$ sono teoremi di $\mathcal{G}$: infatti in $\mathcal{G}$ sono ovviamente teoremi L1 e L2, inoltre $\mathcal{G}$ dimostra L3, come si è visto nella parte 2. dell'esercizio precedente.

2. Tutti i teoremi di $\mathcal{G}$ sono teoremi di $\mathcal{L}$. Ovviamente $\mathcal{L}$ dimostra G1 e G2. Poiché in $\mathcal{L}$ vale il teorema di deduzione, si vede facilmente che $\mathcal{L}$ dimostra G3.

Per verificare che $\mathcal{L}$ dimostra anche gli assiomi restanti di $\mathcal{G}$ dimostriamo prima l'ex falso:

$$\vdash_{\mathcal{L}} \neg\alpha \to \alpha \to \beta.$$

Per L1 vale $\neg\alpha \vdash_{\mathcal{L}} \neg\beta \to \neg\alpha$, per L3 vale $\neg\alpha \vdash_{\mathcal{L}} \alpha \to \beta$, di qui l'ex falso per il teorema di deduzione. Verifichiamo ora che $\mathcal{L}$ dimostra G5. Per l'ex falso $\neg\neg\alpha \vdash_{\mathcal{L}} \neg\alpha \to \neg\neg\neg\alpha$ e quindi $\neg\alpha \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\alpha \to \alpha$ per L3 da cui $\vdash_{\mathcal{L}} \alpha \to \neg\neg\alpha$ e quindi G5 per il teorema di deduzione. Verifichiamo che $\mathcal{L}$ dimostra G6. Per G5 vale $\vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha$ da cui scende G6 utilizzando L3. Verifichiamo che $\mathcal{L}$ dimostra G4. A tale scopo ci occorre provare che

$$\vdash_{\mathcal{L}} (\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha.$$

Ciò si ottiene con una dimostrazione analoga a quella fornita nell'esercizio precedente. Innanzitutto osserviamo che $\alpha \to \neg\alpha, \alpha \vdash_{\mathcal{L}} \neg\alpha$ e $\alpha \to \neg\alpha, \alpha \vdash_{\mathcal{G}} \alpha$. Sia ξ un teorema qualsiasi del calcolo $\mathcal{L}$, per l'ex falso in $\mathcal{L}$ è teorema $\alpha \to \neg\alpha \to \neg\xi$ e quindi $\alpha \to \neg\alpha, \alpha \vdash_{\mathcal{G}} \neg\xi$. Per il teorema di deduzione $\alpha \to \neg\alpha \vdash_{\mathcal{L}} \alpha \to \neg\xi$. Poiché $\mathcal{L}$ dimostra G5 abbiamo $\alpha \to \neg\alpha \vdash_{\mathcal{L}} \neg\neg\alpha \to \neg\xi$ da cui, attraverso L3, otteniamo $\alpha \to \neg\alpha \vdash_{\mathcal{L}} \xi \to \neg\alpha$. Poiché ξ è un assioma del calcolo abbiamo $\alpha \to \neg\alpha \vdash_{\mathcal{L}} \neg\alpha$ da cui l'asserto con il teorema di deduzione. Dimostriamo ora G4: per il teorema di deduzione possiamo limitarci a dimostrare $\alpha \to \beta, \neg\beta \vdash \neg\alpha$:

$\beta \to \neg\beta \to \neg\alpha$	ex falso, G3
$\alpha \to \beta$	ipotesi
$\alpha \to \neg\beta \to \neg\alpha$	transitività di $\to$
$\neg\beta \to \alpha \to \neg\alpha$	G3
$\neg\beta$	ipotesi
$\alpha \to \neg\alpha$	MP
$\neg\alpha$	

dove l'ultimo passaggio dipende dal fatto che $\mathcal{L}$ dimostra $(\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha$.

Esercizio 3.10.3 Si consideri il seguente calcolo hilbertiano $\mathcal{T}$ per il linguaggio basato su $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, dovuto ad A. Tarski, e si dimostri che $\mathcal{T}$ è equivalente a $\mathcal{K}$: l'unica regola di $\mathcal{T}$ è MP e i suoi assiomi comprendono, oltre a K1-K8, tutti gli esempi degli schemi $\neg\alpha \to \alpha \to \beta$ e $(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$.

1. Mostriamo che ogni assioma di $\mathcal{T}$ è teorema di $\mathcal{K}$. Ciò è vero per gli assiomi T1-T8 che coincidono con K1-K8. Sia T9$=\neg\alpha \to \alpha \to \beta$ e T10$=(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha$. $\mathcal{K}$ dimostra T9 per il punto 3) del teorema 3.10.4. $\mathcal{K}$ dimostra T10: per il teorema di deduzione possiamo ridurci a $\neg\alpha \to \alpha \vdash_{\mathcal{K}} \alpha$, il che si dimostra come segue:

$$
\begin{array}{cc}
(\neg\alpha \to \alpha) \to (\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\neg\alpha & \mathrm{K9} \\
\neg\neg\alpha \to \alpha & \mathrm{K10} \\
(\neg\alpha \to \alpha) \to (\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha & \\
\neg\alpha \to \alpha & \text{ipotesi} \\
(\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \alpha & \\
\neg\alpha \to \neg\alpha & \\
\alpha &
\end{array}
$$

dove la penultima riga dipende dal fatto che K1 e K2 sono sufficienti per dimostrare $\xi \to \xi$ per ogni ξ, come si vede nella dimostrazione del teorema 3.10.3.

2. Mostriamo che ogni assioma di $\mathcal{K}$ è teorema di $\mathcal{T}$. Evidentemente ciò è vero per K1-K8. $\mathcal{T}$ dimostra K10. Per il teorema di deduzione possiamo ridurci a $\neg\neg\alpha \vdash_{\mathcal{T}} \alpha$, il che si dimostra come segue:

$$
\begin{array}{cc}
\neg\neg\alpha \to \neg\alpha \to \alpha & \mathrm{T9} \\
\neg\neg\alpha & \text{ipotesi} \\
\neg\alpha \to \alpha & \\
(\neg\alpha \to \alpha) \to \alpha & \mathrm{T10} \\
\alpha &
\end{array}
$$

Per dimostrare che $\mathcal{T}$ dimostra K9 occorrono alcuni risultati intermedi:

1. $\vdash_{\mathcal{T}} \alpha \to \neg\neg\alpha$,
2. $\vdash_{\mathcal{T}} (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$,
3. $\vdash_{\mathcal{T}} (\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$.

Dimostriamo la 1). Per il teorema di deduzione possiamo limitarci a dimostrare $\alpha \vdash_{\mathcal{T}} \neg\neg\alpha$:

$$
\begin{array}{cc}
\neg\alpha \to \alpha \to \neg\neg\alpha & \mathrm{T9} \\
\alpha \to \neg\alpha \to \neg\neg\alpha & \text{scambio premesse} \\
\alpha & \text{ipotesi} \\
\neg\alpha \to \neg\neg\alpha & \\
\neg\neg\neg\alpha \to \neg\alpha & \mathrm{K10} \\
\neg\neg\neg\alpha \to \neg\neg\alpha & \text{transitività di } \to \\
(\neg\neg\neg\alpha \to \neg\neg\alpha) \to \neg\neg\alpha & \mathrm{T9} \\
\neg\neg\alpha &
\end{array}
$$

Dimostriamo la 2). Per il teorema di deduzione possiamo limitarci a $\alpha \to \beta, \neg\beta \vdash_{\mathcal{T}} \alpha$:

$$
\begin{array}{cc}
\neg\beta \to \beta \to \neg\alpha & \mathrm{T9} \\
\neg\beta & \text{ipotesi} \\
\beta \to \neg\alpha & \\
\alpha \to \beta & \text{ipotesi} \\
\alpha \to \neg\alpha & \text{transitività di } \to \\
\neg\neg\alpha \to \alpha & \mathrm{K10} \\
\neg\neg\alpha \to \neg\alpha & \text{transitività di } \to \\
(\neg\neg\alpha \to \neg\alpha) \to \neg\alpha & \mathrm{T9} \\
\neg\alpha &
\end{array}
$$

Dimostriamo la 3). Per il teorema di deduzione possiamo limitarci a dimostrare $\neg\alpha \to \neg\beta \vdash_{\mathcal{T}} \beta \to \alpha$:

$$\begin{array}{cc}
\neg\alpha \to \neg\beta & \text{ipotesi} \\
\neg\neg\beta \to \neg\neg\alpha & (2) \\
\beta \to \neg\neg\beta & (1) \\
\beta \to \neg\neg\alpha & \text{transitività di } \to \\
\neg\neg\alpha \to \alpha & \text{K10} \\
\beta \to \alpha & \text{transitività di } \to
\end{array}$$

Per dimostrare K9 possiamo ridurci a dimostrare $\alpha \to \neg\alpha \vdash_{\mathcal{T}} \neg\alpha$. Da T9 ricaviamo $\vdash_{\mathcal{T}} \alpha \to \neg\alpha \to \neg\xi$ mediante lo scambio di premesse. Si vede facilmente che $\alpha \to \neg\alpha, \alpha \vdash_{\mathcal{T}} \neg\xi$. Per il teorema di deduzione $\alpha \to \neg\alpha \vdash_{\mathcal{T}} \alpha \to \neg\xi$. Per K10 e la transitività di $\to$ si ottiene $\alpha \to \neg\alpha \vdash_{\mathcal{T}} \neg\neg\alpha \to \neg\xi$. Infine dalla (3) otteniamo $\alpha \to \neg\alpha \vdash_{\mathcal{T}} \xi \to \neg\alpha$. Se ora assumiamo che ξ, invece di essere una formula qualsiasi, sia un teorema di $\mathcal{T}$, otteniamo $\alpha \to \neg\alpha \vdash_{\mathcal{T}} \neg\alpha$, da cui si ottiene K9 mediante il teorema di deduzione.

3.11 Compattezza

Esercizio 3.11.1 Si dimostri il teorema di compattezza, nel caso di un linguaggio numerabile, senza utilizzare nozioni sintattiche e senza usare il lemma di Zorn. (Si segua la dimostrazione del teorema di Lindenbaum, sostituendo "coerente" con "finitamente soddisfacibile".)

Supponiamo che Γ sia un insieme di formule finitamente soddisfacibile, ossia che ogni suo sottoinsieme finito sia soddisfacibile. Dobbiamo dimostrare che Γ è soddisfacibile. Poiché il linguaggio è numerabile, possiamo disporre le formule del linguaggio in una successione $\{\alpha_i : i \in \omega\}$. Definiamo quindi per recursione una successione di insiemi $\{\Gamma_i : i \in \omega\}$ dove $\Gamma_0 = \Gamma$ e

$$\Gamma_{i+1} = \begin{cases} \Gamma_i \cup \{\alpha_i\} & \text{se } \Gamma_i \cup \{\alpha_i\} \text{ è finitamente soddisfacibile} \\ \Gamma_i & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Definiamo $\Gamma^* = \bigcup\{\Gamma_i\}$. Ogni insieme Γ_i è finitamente soddisfacibile: Γ_0 per ipotesi e gli altri Γ_i per come sono stati definiti. Dimostriamo che anche Γ^* è finitamente soddisfacibile. Sia Δ un sottoinsieme finito di Γ^*. Esiste un $i \in \omega$ tale che $\Delta \subseteq \Gamma_i$: ciò dipende dal fatto che i vari Γ_i formano una catena rispetto a $\subseteq$ e dalla finitezza di Δ. (Si veda il lemma 3.9.4.) Poiché Γ_i è finitamente soddifacibile e Δ è un suo sottoinsieme finito, Δ è soddisfacibile. Quindi Γ^* è finitamente soddisfacibile.

Mostriamo ora che Γ^* è finitamente soddisfacibile e massimale, ossia che nessuna sua estensione propria è finitamente soddisfacibile. Supponiamo infatti che esista un Γ' finitamente soddisfacibile e tale che $\Gamma^* \subset \Gamma'$ e consideriamo quindi una formula α tale che $\alpha \in \Gamma' - \Gamma^*$. Sia $\alpha = \alpha_i$ nella enumerazione precedente: poiché $\alpha_i \notin \Gamma^*$, ciò significa che $\Gamma_i \cup \{\alpha_i\}$ non era finitamente soddisfacibile e che quindi esisteva un sottoinsieme finito $\Delta \subseteq \Gamma_i \cup \{\alpha_i\}$ che era insoddisfacibile. Ma allora Δ è un sottoinsieme finito insoddisfacibile di Γ^*, contro l'ipotesi che Γ^* sia finitamente soddisfacibile.

Mostriamo che Γ^* è completo. Supponiamo per assurdo che esista una formula α tale che $\alpha \notin \Gamma^*$ e $\neg\alpha \notin \Gamma^*$, allora potremmo costruire un'estensione propria e finitamente soddisfacibile di Γ^*, il che è assurdo. Potremmo infatti procedere nel modo seguente. Consideriamo l'insieme $\Gamma_0 = \Gamma^* \cup \{\alpha\}$: se è finitamente soddisfacibile tale insieme è l'estensione di Γ^* cercata, altrimenti lo sarà $\Gamma_1 = \Gamma^* \cup \{\neg\alpha\}$. Infatti è impossibile che Γ_0 e Γ_1 siano entrambi non finitamente soddisfacibili: se lo fossero esisterebbero due sottoinsiemi finiti $\Delta_0 \subseteq \Gamma_0$ e $\Delta_1 \subseteq \Gamma_1$ tali che $\Delta_0 \cup \{\alpha\}$ e $\Delta_1 \cup \{\neg\alpha\}$ sarebbero insoddisfacibili. Ma allora anche $\Delta_0 \cup \Delta_1$ sarebbe insoddisfacibile (si ricordi che ogni valutazione è modello di α o di $\neg\alpha$), pur essendo $\Delta_0 \cup \Delta_1 \subseteq \Gamma^*$.

Mostriamo infine che Γ^* è saturo. Chiaramente non può contenere p_i e $\neg p_i$, altrimenti non sarebbe finitamente soddisfacibile. Se $\neg\neg\alpha \in \Gamma^*$ allora $\alpha \in \Gamma^*$: se così non fosse dalla completezza di Γ^* scenderebbe $\neg\alpha \in \Gamma^*$ e quindi Γ^* non sarebbe finitamente soddisfacibile. Se $\alpha \wedge \beta \in \Gamma^*$ allora $\alpha \in \Gamma^*$ e $\beta \in \Gamma^*$: altrimenti avremmo $\alpha \notin \Gamma^*$ oppure $\beta \notin \Gamma^*$ e quindi per completezza $\neg\alpha \in \Gamma^*$ oppure $\neg\beta \in \Gamma^*$, ma allora rispettivamente $\alpha \wedge \beta$, $\neg\alpha$ oppure $\alpha \wedge \beta$, $\neg\beta$ formerebbero un sottoinsieme finito insoddisfacibile di Γ^*. Se $\neg(\alpha \wedge \beta) \in \Gamma^*$ allora $\neg\alpha \in \Gamma^*$ oppure $\neg\beta \in \Gamma^*$: altrimenti avremmo per completezza sia $\alpha \in \Gamma^*$ sia $\beta \in \Gamma^*$, ma allora $\neg(\alpha \wedge \beta)$, α, β formerebbero un sottoinsieme finito insoddisfacibile di Γ^*.

Abbiamo così ottenuto un'estensione satura Γ^* di Γ: poiché ogni insieme saturo è soddisfacibile anche Γ^* lo è e poiché $\Gamma \subseteq \Gamma^*$ la stessa valutazione che rende vera ogni formula di Γ^* sarà modello anche di Γ.

Capitolo 4

Logica predicativa

4.1 Linguaggi del primo ordine

4.2 Recursione su termini e formule

4.3 Significato dei termini

Esercizio 4.3.1 Sia $\mathcal{L} = \{+, \cdot, S, 0\}$, sia $\mathcal{A}$ il modello standard dell'Aritmetica e sia s tale che $s_i = i$.

1. Supponendo che t sia di volta in volta $S(0) + 0$, $S(v_0) + S(0)$, $v_0 + v_1$, $v_1 + v_2$, $v_0 + v_0$, $v_1 + v_1$, $S(S(0)) \cdot v_0$, si determini $t^{\mathcal{A}}(s)$.

2. Nella stessa ipotesi si determini $t^{\mathcal{A},n}(s_0, ..., s_{n-1})$, scegliendo sempre n in modo che abbia il valore minimo.

1.

t	$t^{\mathcal{A}}(s)$
$S(0) + 0$	1
$S(v_0) + S(0)$	2
$v_0 + v_1$	1
$v_1 + v_2$	3
$v_0 + v_0$	0
$v_1 + v_1$	2
$S(S(0)) \cdot v_0$	0

2. In ogni caso $t^{\mathcal{A}}(s) = t^{\mathcal{A},n}(s_0, ..., s_{n-1})$; nella tabella indichiamo il valore da assegnare a n:

t	n
$S(0) + 0$	0
$S(v_0) + S(0)$	1
$v_0 + v_1$	2
$v_1 + v_2$	3
$v_0 + v_0$	1
$v_1 + v_1$	2
$S(S(0)) \cdot v_0$	1

Esercizio 4.3.2 Supponiamo che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{L}$ siano come nell'esercizio precedente. Per ognuna delle seguenti funzioni da ω verso ω si individui un termine che abbia tale funzione come significato: $2x + 3$, $x^2 + 2x + 1$, $x^2 + 2xy + y^2$, $x + x$, $x + y$, x, y. È una scelta univoca?

funzione	termine
$2x + 3$	$(SS0 \cdot v_0) + SSS0$
$x^2 + 2x + 1$	$(v_0 \cdot v_0) + (SS0 \cdot v_0) + S0$
$x^2 + 2xy + y^2$	$(v_0 \cdot v_0) + (SS0 \cdot v_0 \cdot v_1) + (v_1 \cdot v_1)$
$x + x$	$v_0 + v_0$
$x + y$	$v_0 + v_1$
x	v_0
y	v_1

Si osservi che mentre nel caso di x è evidente che la funzione rappresentata è la funzione identità (unaria), nel caso di y è tutt'altro che evidente che la funzione rappresentata sia la funzione (binaria) di proiezione $i_1^2(x, y) = y$. La scelta di t non è univoca. Ad esempio, per ogni termine t, il termine $t \cdot S(0)$ ha identico significato in $\mathcal{A}$.

4.4 Significato delle formule

Esercizio 4.4.1 Si traducano gli enunciati seguenti dopo aver specificato, per ognuno di essi, una struttura $\mathcal{A}$ e un linguaggio $\mathcal{L}$ dello stesso tipo che contengano relazioni, funzioni e costanti tali da rendere possibile la traduzione:

1. Bruno ama Anna.

2. Se Bruno va al cinema allora Bruno non ama Anna.

3. I bar sono chiusi.

4. Ognuno ama qualcuno.

5. Nessuno ama tutti.

6. Ogni coda di topo è la coda di un animale.

1. Sia $\mathcal{L} = \{R, c, d\}$ e $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}})$ dove $R^{\mathcal{A}}(x, y)$ sse x ama y, $c^{\mathcal{A}}$ è Bruno, $d^{\mathcal{A}}$ è Anna. La traduzione è $R(c, d)$.

2. Sia $\mathcal{L} = \{R, P, c, d\}$ e $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}}, P^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}}, d^{\mathcal{A}})$ dove R, c, d hanno la stessa interpretazione stabilita nel punto precedente e inoltre $P^{\mathcal{A}}(x)$ sse x va al cinema. La traduzione è $P(c) \to \neg R(c, d)$. Si può interpretare *andare al cinema* non come una proprietà di individui, ma come una relazione tra un individuo e un cinema. Introduciamo allora nel linguaggio un simbolo relazionale binario Q che interpretiamo sulla relazione binaria $Q^{\mathcal{A}}(x, y)$ sse x va a y, e reinterpretiamo il simbolo relazionale unario P sulla proprietà $P^{\mathcal{A}}(x)$ sse x è un cinema. Allora la traduzione è

$$\exists v_0(P(v_0) \wedge Q(c, v_0)) \to \neg R(c, d).$$

3. Sia $\mathcal{L} = \{P_0, P_1\}$ e $\mathcal{A} = (A, P_0^{\mathcal{A}}, P_1^{\mathcal{A}})$ dove $P_0^{\mathcal{A}}(x)$ sse x è un bar e $P_1^{\mathcal{A}}(x)$ sse x è chiuso. La traduzione è $\forall v_0(P_0(v_0) \to P_1(v_0))$.

4. Sia $\mathcal{L} = \{R\}$ e $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}})$ dove $R^{\mathcal{A}}(x, y)$ sse x ama y. La traduzione è $\forall v_0 \exists v_1 R(v_0, v_1)$.

5. Siano $\mathcal{L}$ e $\mathcal{A}$ come sopra. La traduzione è $\neg\exists v_0 \forall v_1 R(v_0, v_1)$.

6. Sia $\mathcal{L} = \{R, P, Q\}$ e $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}}, P^{\mathcal{A}}, Q^{\mathcal{A}})$ dove $R^{\mathcal{A}}(x, y)$ sse x è la coda di y, $P^{\mathcal{A}}(x)$ sse x è un topo e $Q^{\mathcal{A}}(x)$ sse x è un animale. La traduzione è

$$\forall v_1(\exists v_0(P(v_0) \wedge R(v_1, v_0) \to \exists v_0(Q(v_0) \wedge R(v_1, v_0)).$$

Esercizio 4.4.2 Si determini il significato delle formule

$$\exists v_1 R(v_0, v_1), \forall v_1 R(v_0, v_1), \exists v_1 R(v_1, v_0), \forall v_1 R(v_1, v_0)$$

in $\mathcal{A}$ nei casi seguenti:

1. $A = \omega$ e $R^{\mathcal{A}} =<$ o $R^{\mathcal{A}} =\leq$,

2. $A = \mathcal{P}(X)$ e $R^{\mathcal{A}} =\subset$ o $R^{\mathcal{A}} =\subseteq$,

3. $A = \omega$, $R^{\mathcal{A}}(m, n)$ sse esiste un $k \in \omega$ tale che $m \cdot k = n$..

Considerando le formule come formule n-arie per un valore di n che sia il minimo possibile, si confrontino i significati delle seguenti coppie di formule:

1. $R(v_0, v_1)$, $R(v_1, v_0)$,

2. $R(v_0, v_0)$, $R(v_1, v_1)$,

3. $\exists v_0 R(v_0, v_1)$, $\exists v_1 R(v_0, v_1)$,

4. $\exists v_0 R(v_1, v_0)$, $\exists v_1 R(v_1, v_0)$.

1.1. In entrambi i casi il significato di $\exists v_1 R(v_0, v_1)$ è A^ω. Il significato di $\forall v_1 R(v_0, v_1)$ è $\emptyset$ nel primo caso e $\{s : s_0 = 0\}$ nel secondo caso. Il significato di $\exists v_1 R(v_1, v_0)$ è $\{s : s_0 > 0\}$ nel primo caso e A^ω nel secondo caso. Il significato di $\forall v_1 R(v_1, v_0)$ è $\emptyset$ nel primo e nel secondo caso.

1.2. Il significato di $\exists v_1 R(v_0, v_1)$ è $\{s : s_0 \neq X\}$ nel primo caso e A^ω nel secondo caso. Il significato di $\forall v_1 R(v_0, v_1)$ è $\emptyset$ nel primo caso e $\{s : s_0 = \emptyset\}$ nel secondo caso. Il significato di $\exists v_1 R(v_1, v_0)$ è $\{s : s_0 \neq \emptyset\}$ nel primo caso e A^ω nel secondo caso. Il significato di $\forall v_1 R(v_1, v_0)$ è $\emptyset$ nel primo caso e $\{s : s_0 = X\}$ nel secondo caso.

1.3. Il significato di $\exists v_1 R(v_0, v_1)$ è ω^ω perché ogni numero naturale divide qualche numero naturale. (Lo 0 divide se stesso.) Il significato di $\forall v_1 R(v_0, v_1)$ è $\{s : s_0 = 1\}$ dato che solo 1 divide tutti i naturali. Il significato di $\forall v_1 R(v_1, v_0)$ è $\{s : s_0 = 0\}$ dato che solo lo 0 è diviso da tutti i naturali.

Confrontiamo i significati delle coppie di formule in questione relativamente alla terza interpretazione.

3.1. Il significato $R(v_0, v_1)^{\mathcal{A},2}$ è un insieme di coppie appartenenti a ω^2, l'insieme delle coppie in cui il primo divide il secondo. Il significato $R(v_1, v_0)^{\mathcal{A},2}$ è l'insieme $\{(x, y) : (y, x) \in R(v_0, v_1)^{\mathcal{A},2}\}$, ossia l'insieme delle coppie in cui il primo è multiplo del secondo.

3.2. $R(v_0, v_0)^{\mathcal{A},1} = \omega$. $R(v_1, v_1)^{\mathcal{A},2} = \omega^2$. Infatti $R(v_1, v_1)^{\mathcal{A},2}$ contiene tutte le coppie (x, y) che soddisfano le condizioni seguenti: su x non è posta nessuna condizione, dato che v_0 non compare nella formula, su y è posta la condizione che divida se stesso, condizione che ogni oggetto soddisfa. Volendo essere più rigorosi dovremmo prima riconoscere che $R(v_1, v_1)^{\mathcal{A}}$ è costituito da tutte le successioni $s \in \omega^\omega$ tali che s_1 divida s_1, vale a dire da tutte le successioni di ω^ω, e in un secondo tempo riconoscere $R(v_1, v_1)^{\mathcal{A},2}$ come l'insieme di tutte le coppie (x, y) tali che esista una $s \in R(v_1, v_1)^{\mathcal{A}}$ per cui valga $s_0 = x$ e $s_1 = y$.

3.3. $\exists v_0 R(v_0, v_1)$ è una formula 2-aria perché 2 è il minimo numero naturale strettamente maggiore agli indici delle sue variabili libere, che si riducono a v_1. $\exists v_0 R(v_0, v_1)^{\mathcal{A},2} = \omega^2$. Infatti $\exists v_0 R(v_0, v_1)^{\mathcal{A}}$ è ω^ω. $\exists v_1 R(v_0, v_1)$ è una formula 1-aria perché 1 è il minimo numero naturale strettamente maggiore agli indici delle sue variabili libere, che si riducono a v_0. $\exists v_1 R(v_0, v_1)^{\mathcal{A},1} = \omega$.

3.4. $\exists v_0 R(v_1, v_0)^{\mathcal{A},2} = \omega^2$, $\exists v_1 R(v_1, v_0)^{\mathcal{A},1} = \omega$.

Esercizio 4.4.3 *Per ogni $X \subseteq A^\omega$ definiamo sezione i-esima di X l'insieme $(X)_i = \{s_i : s \in X\}$. Si dimostri che, per ogni α, se v_i non è libera in α allora $(\alpha^{\mathcal{A}})_i = A$ se $\alpha^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$ e $(\alpha^{\mathcal{A}})_i = \emptyset$ se $\alpha^{\mathcal{A}} = \emptyset$.*

Supponiamo $\alpha^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$, allora esiste $s \in \alpha^{\mathcal{A}}$. Consideriamo ora un elemento a di A e una successione r tale che $r_i = a$ e $r_j = s_j$ per ogni j tale v_j sia libera in α. Chiaramente sarà sempre $j \neq i$ dato che v_i non è libera in α. Per il teorema 4.4.3 avremo $r \in \alpha^{\mathcal{A}}$ e quindi $a \in (\alpha^{\mathcal{A}})_i$. Poiché a era qualsiasi avremo $A = (\alpha^{\mathcal{A}})_i$. Supponiamo $\alpha^{\mathcal{A}} = \emptyset$, allora evidentemente $(\alpha^{\mathcal{A}})_i = \emptyset$.

Esercizio 4.4.4 *Si dimostrino le asserzioni seguenti:*

1. $E_i(X) = \bigcup\{C_i(s) : s \in X\}$.

2. $O_i(\emptyset) = \emptyset$ *e* $E_i(\emptyset) = \emptyset$.

3. $O_i(X) \subseteq E_i(X)$.

4. $O_i(O_j(X)) = O_j(O_i(X))$ e $E_i(E_j(X)) = E_j(E_i(X))$.

5. $O_i(X \Rightarrow Y) \subseteq O_i(X) \Rightarrow O_i(Y)$.

6. $E_i(X) \Rightarrow E_i(Y) \subseteq E_i(X \Rightarrow Y)$.

7. $O_i(X \Rightarrow Y) \subseteq E_i(X) \Rightarrow E_i(Y)$.

1. Se $r \in E_i(X)$ allora $C_i(r) \cap X \neq \emptyset$ e quindi esiste r' tale che $r' \in X$ e $r' \in C_i(s)$. Ma $r' \in C_i(r)$ implica $r \in C_i(r')$, quindi $r \in \bigcup\{C_i(s) : s \in X\}$. Sia $r \in \bigcup\{C_i(s) : s \in X\}$ allora esiste $r' \in X$ tale che $r \in C_i(r')$. Poiché $r' \in C_i(r)$ abbiamo $C_i(r) \cap X \neq \emptyset$ e quindi $r \in E_i(X)$.

2. $O_i(\emptyset) = \{s : C_i(s) \subseteq \emptyset\} = \emptyset$. Infatti per ogni s abbiamo $C_i(s) \neq \emptyset$. Vale inoltre $E_i(\emptyset) = -O_i - (\emptyset)$ per il teorema 4.4.5.(3) e inoltre, per il teorema 4.4.5 (1),

$$-O_i - (\emptyset) = -O_i(A^\omega) = -A^\omega = \emptyset.$$

3. $O_i(X) \subseteq X \subseteq E_i(X)$ per il teorema 4.4.5 (2).

4. Ricordiamo che $r \in O_n(Y)$ sse $r(n/a) \in Y$ per ogni $a \in A$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} O_i(O_j(X)) &= \{s : s(i/a) \in O_j(X) \text{ per ogni } a \in A\} \\ &= \{s : s(i/a)(j/a') \in X \text{ per ogni } a' \in A, \text{ per ogni } a \in A\} \\ &= \{s : s(j/a')(i/a) \in X \text{ per ogni } a \in A, \text{ per ogni } a' \in A\} \\ &= \{s : s(j/a') \in O_i(X) \text{ per ogni } a' \in A\} \\ &= O_j(O_i(X)). \end{aligned}$$

5. Se $s \in O_i(X \Rightarrow Y)$ allora $C_i(s) \subseteq X \Rightarrow Y = -X \cup Y$. Distinguiamo due casi. Caso a), $C_i(s) \subseteq Y$, allora $s \in O_i(Y)$. Caso b), $C_i(s) \cap -X \neq \emptyset$, allora $s \notin O_i(X)$ ossia $s \in -O_i(X)$. In entrambi i casi $s \in -O_i(X) \cup O_i(Y)$ che coincide con $O_i(X) \Rightarrow O_i(Y)$.

6.

$$\begin{aligned} E_i(X) \Rightarrow E_i(Y) &= -E_i(X) \cup E_i(Y) \\ &= O_i(-X) \cup E_i(Y) \\ &\subseteq E_i(-X) \cup E_i(Y) \\ &= E_i(-X \cup Y) \\ &= E_i(X \Rightarrow Y). \end{aligned}$$

La seconda e la quarta riga si ottengono per il teorema 4.4.5 mentre la terza deriva dal fatto che $O_i(-X) \subseteq E_i(-X)$ per il punto 3) precedente.

7. Se $s \in O_i(X \Rightarrow Y)$ allora $C_i(s) \subseteq X \Rightarrow Y = -X \cup Y$. Distinguiamo due casi. Caso a), $C_i(s) \subseteq -X$, allora $s \in O_i(-X)$ e quindi $s \in -E_i(X)$. Caso b), $C_i(s) \cap Y \neq \emptyset$, allora $s \in E_i(Y)$. In entrambi i casi $s \in . - E_i(X) \cup E_i(Y)$ che coincide con $E_i(X) \Rightarrow E_i(Y)$.

Esercizio 4.4.5 Sia $\mathcal{A}$ una struttura qualsiasi. Si dimostri che:

1. sono definibili $\emptyset$ e A^n, per ogni $n \in \omega$;

2. per ogni formula α contenente libera esattamente la variabile v_i, esiste una formula β contenente libere esattamente le variabili $v_0, \ldots, v_i$, quindi una formula $i+1$ aria, tale che $\alpha^{\mathcal{A},i+1} = \beta^{\mathcal{A},i+1}$. (Si usi l'identità.)

1. $\emptyset$ è definibile da $v_0 \neq v_0$ e più in generale da ogni α tale che $\neg\alpha$ sia logicamente valida. A^n è definibile da $v_0 = v_0 \wedge \ldots \wedge v_{n-1} = v_{n-1}$ oppure semplicemente da $v_{n-1} = v_{n-1}$.

2. Supponiamo che α contenga libera esattamente v_i. Allora poniamo β uguale a

$$v_0 = v_0 \wedge \ldots \wedge v_{i-1} = v_{i-1} \wedge \alpha \ .$$

Si vede facilmente che β è una formula $i+1$-aria e che $\beta^{\mathcal{A}} = \alpha^{\mathcal{A}}$. Infatti

$$\begin{aligned} M(\beta) &= M(v_0 = v_0) \cap \ldots \cap M(v_{i-1} = v_{i-1}) \cap M(\alpha) \\ &= A^\omega \cap \ldots \cap A^\omega \cap M(\alpha) \\ &= M(\alpha). \end{aligned}$$

Da ciò deriva $\alpha^{\mathcal{A},i+1} = \beta^{\mathcal{A},i+1}$.

Esercizio 4.4.6 Supponiamo che i simboli $\leq, +, \cdot, S, 1, 0$ siano interpretati nel modo usuale sui numeri naturali.

1. Si trovi una formula $\alpha(v_0)$ che definisca la costante 3 nella struttura $(\omega, S, 0)$.

2. Si trovi una formula $\alpha(v_0, v_1)$ che definisca in $(\omega, +, 1)$ la funzione successore.

3. Si trovi una formula $\alpha(v_0)$ che definisca la costante 3 nella struttura $(\omega, +, 0)$.

4. Si trovi una formula $\alpha(v_0, v_1)$ che definsca in $(\omega, \leq, \cdot, +, 0)$ la relazione "m divide n". Si trovi quindi una formula $\beta(v_0)$ che definisca l'insieme dei numeri primi. (Si ricordi che un numero è primo se è maggiore di 1 e non ha divisori tranne se stesso e l'unità.) Si trovi infine una formula $\gamma(v_0, v_1, v_2)$ che definisca la relazione "k è il massimo comun divisore di m e n".

1. $v_0 = S(S(S(0)))$.

2. $v_1 = v_0 + 1$.

3. Innanzitutto mostriamo che è possibile definire le relazioni $\leq$ e $<$. Poniamo infatti

$$v_0 \leq v_1 \text{ sse } \exists v_2(v_0 + v_2 = v_1)$$

e ovviamente $v_0 < v_1$ sse $v_0 \leq v_1 \wedge v_0 \neq v_1$. Quindi mostriamo che è possibile definire la funzione successore:

$$v_1 = S(v_0) \text{ sse } v_0 < v_1 \wedge \forall v_2 (v_0 < v_2 \to v_1 \leq v_2).$$

A questo punto possiamo definire 3 mediante la seguente formula $\alpha(v_0)$:

$$\exists v_1 v_2 (v_1 = S(0) \wedge v_2 = S(v_1) \wedge v_0 = S(v_2)).$$

4. Poniamo $\alpha(v_0, v_1) = \exists v_2 (v_0 \cdot v_2 = v_1)$ e $\beta(v_0) = 1 < v_0 \wedge \forall v_1 (\alpha(v_1, v_0) \to v_1 = 1 \vee v_1 = v_0)$. Infine poniamo $\alpha'(v_0, v_1, v_2) = \alpha(v_0, v_1) \wedge \alpha(v_0, v_2)$ per la relazione di divisore comune e quindi

$$\gamma(v_0, v_1, v_2) = \alpha'(v_0, v_1, v_2) \wedge \forall v_3 (\alpha'(v_3, v_1, v_2) \to v_3 \leq v_0).$$

4.5 Sostituzione

Esercizio 4.5.1 Si dimostri che se v_j non è libera in α e v_j è libera per v_i in α, allora $\mathcal{A}$

$$\mathcal{A} \models \forall v_i \alpha[s] \text{sse } \mathcal{A} \models \forall v_j \alpha(v_i/v_j)[s]$$

e quindi $\forall v_i\, \alpha \leftrightarrow \forall v_j\, \alpha(v_i/v_j)$ è logicamente valida.

Per il teorema 4.4.2 $\mathcal{A} \models \forall v_j \alpha(v_i/v_j)[s]$ sse $\mathcal{A} \models \alpha(v_i/v_j)[s(j/a)]$ per ogni $a \in A$. Per il teorema 4.5.2, dato che v_j è libera per v_i in α, ciò equivale a

$$\mathcal{A} \models \alpha[s(j/a)(i/v_j^{\mathcal{A}}(s(j/a)))] \text{ per ogni } a \in A$$

ovvero a $\mathcal{A} \models \alpha[s(j/a)(i/a)]$ per ogni $a \in A$. Poiché v_j non è libera in α le successioni $s(j/a)(i/a)$ e $s(i/a)$ coincidono sulle variabili libere di α e quindi, per il teorema 4.4.3, l'ultima asserzione equivale a $\mathcal{A} \models \alpha[s(i/a)]$ per ogni $a \in A$ che a sua volta equivale a $\mathcal{A} \models \forall v_i \alpha[s]$.

4.6 Formule logicamente valide

Esercizio 4.6.1 Supponendo che tra gli esempi dell'ultimo schema d'assioma di Eq vi siano anche quelli ottenuti rimpiazzando R con $=$, si dimostri che il secondo e il terzo assioma di Eq, che stabiliscono simmetria e transitività di $=$, sono conseguenza logica dei restanti assiomi.

Simmetria. Consideriamo il seguente esempio dell'ultimo schema di Eq:

$$x = y \to x = x \to x = x \to y = x.$$

Basta allora osservare che in termini di conseguenza logica enunciativa (nel paragrafo 4.7 si dimostra che la conseguenza logica enunciativa è inglobata in quella predicativa)

$$x = y \to x = x \to x = x \to y = x, x = x \models x = y \to y = x.$$

Infatti utilizzando l'equivalenza $(\alpha \to \beta \to \gamma) \leftrightarrow (\beta \to \alpha \to \gamma)$ l'asserzione precedente equivale a

$$x = x \to x = x \to x = y \to y = x, x = x \models x = y \to y = x$$

da cui segue l'asserto ricordando che $\alpha, \alpha \to \beta \models \beta$. Transitività. Consideriamo il seguente esempio dell'ultimo schema di Eq:

$$x = x \to y = z \to x = y \to x = z.$$

Ragionando come sopra si vede facilmente che

$$x = x \to y = z \to x = y \to x = z, x = x \models x = y \to y = z \to x = z.$$

Esercizio 4.6.2 Si dimostrino le seguenti equazioni:

1. $E_i(E_i(X)) = E_i(X)$,

2. $O_i(E_i(X)) = E_i(X)$,

3. $E_i(O_i(X)) = O_i(X)$.

1.

$$\begin{array}{rcll} E_i(E_i(X)) & = & -O_i(-E_i(X)) & \text{teorema 4.4.5 (3)} \\ & = & -O_i(O_i(-X)) & \text{teorema 4.4.5 (4)} \\ & = & -O_i(-X) & \text{teorema 4.6.7 (3)} \\ & = & E_i(X) & \text{teorema 4.4.5 (3).} \end{array}$$

2. Per il teorema 4.6.8 (3), $E_i(E_i(X)) = E_i(X)$ implica $O_i(E_i(X)) = E_i(X)$, ma l'antecedente è esattamente quanto abbiamo dimostrato al punto precedente.

3. Per il teorema 4.6.8 (3), $O_i(O_i(X)) = O_i(X)$ implica $E_i(O_i(X)) = O_i(X)$, ma l'antecedente è esattamente quanto abbiamo dimostrato nel teorema 4.6.7 (3).

Esercizio 4.6.3 Se X è un punto fisso di E_i, allora

1. $E_i(X \cup Y) = X \cup E_i(Y)$,

2. $E_i(X \cap Y) = X \cap E_i(Y)$,

3. $Y \subseteq X$ implica $E_i(Y) \subseteq X$.

Assumiamo $E_i(X) = X$.
1.

$$\begin{array}{rcll} E_i(X \cup Y) & = & E_i(X) \cup E_i(Y) & \text{teorema 4.4.5 (6)} \\ & = & X \cup E_i(Y). & \end{array}$$

2. Osserviamo che X è punto fisso di E_i sse $-X$ è punto fisso di E_i (teorema 4.6.8 (2)) sse $-X$ è punto fisso di O_i (teorema 4.6.8 (3)). Abbiamo allora

$$\begin{array}{rcll} E_i(X \cap Y) & = & -O_i - (X \cap Y) & \text{teorema 4.4.5 (3)} \\ & = & -O_i(-X \cup -Y) & \text{De Morgan} \\ & = & -(-X \cup O_i(-Y)) & \text{teorema 4.6.9 (1)} \\ & = & X \cap -O_i(-Y) & \text{De Morgan} \\ & = & X \cap E_i(Y) & \text{teorema 4.4.5 (3).} \end{array}$$

3. $X \subseteq Y$ implica $E_i(Y) \subseteq E_i(X) = X$, per il teorema 4.4.5 (5).

Esercizio 4.6.4 Si dimostri che le formule seguenti sono valide:

1. $\exists v_i \alpha \leftrightarrow \alpha$, v_i non libera in α,
2. $\exists v_i \exists v_i\, \alpha \leftrightarrow \exists v_i\, \alpha$,
3. $\forall v_i \alpha \rightarrow \exists v_i \alpha$,
4. $\forall v_i \forall v_j \alpha \leftrightarrow \forall v_j \forall v_i \alpha$,
5. $\exists v_i \exists v_j \alpha \leftrightarrow \exists v_j \exists v_i \alpha$,
6. $\forall v_i(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\forall v_i \alpha \rightarrow \forall v_i \beta)$,
7. $(\exists v_i \alpha \rightarrow \exists v_i \beta) \rightarrow \exists v_i(\alpha \rightarrow \beta)$,
8. $\forall v_i(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\exists v_i \alpha \rightarrow \exists v_i \beta)$,
9. $(\alpha \rightarrow \exists v_i \beta) \rightarrow \exists v_i(\alpha \rightarrow \beta)$,
10. $(\forall v_i \alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \exists v_i(\alpha \rightarrow \beta)$,
11. $\forall v_i(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \alpha \vee \forall v_i \beta$, v_i non libera in α,
12. $\forall v_i(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \alpha \wedge \forall v_i \beta$, v_i non libera in α,
13. $\exists v_i(\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \alpha \vee \exists v_i \beta$, v_i non libera in α,
14. $\exists v_i(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \alpha \wedge \exists v_i \beta$, v_i non libera in α.

1. Per dimostrare che $\exists v_i \alpha \leftrightarrow \alpha$ è logicamente valida occorre dimostrare che $(\exists v_i \alpha)^{\mathcal{A}} = \alpha^{\mathcal{A}}$, ossia che $E_i(\alpha^{\mathcal{A}}) = \alpha^{\mathcal{A}}$. Per il teorema 4.6.6, se v_i non è libera in α allora $\alpha^{\mathcal{A}}$ è un punto fisso di O_i. Inoltre, per il teorema 4.6.8 (3), $\alpha^{\mathcal{A}}$ è anche punto fisso di E_i, che è quanto si doveva dimostrare.

2. Basta dimostrare che $E_i(E_i(\alpha^{\mathcal{A}})) = E_i(\alpha^{\mathcal{A}})$: esercizio 4.6.2 (1).

3. Per dimostrare che $\forall v_i \alpha \rightarrow \exists v_i \alpha$ è valida è sufficiente dimostrare che $(\forall v_i \alpha)^{\mathcal{A}} \subseteq (\exists v_i \alpha)^{\mathcal{A}}$ ossia che $O_i(\alpha^{\mathcal{A}}) \subseteq E_i(\alpha^{\mathcal{A}})$ il che si ottiene immediatamente dal teorema 4.4.5 (2).

4. Basta dimostrare che $O_i(O_j(\alpha^{\mathcal{A}})) = O_j(O_i(\alpha^{\mathcal{A}}))$: esercizio 4.4.4 (4).

5. Idem.

6. Basta dimostrare che $O_i(\alpha^{\mathcal{A}} \Rightarrow \beta^{\mathcal{A}}) \subseteq O_i(\alpha^{\mathcal{A}}) \Rightarrow O_i(\beta^{\mathcal{A}})$: esercizio 4.4.4 (5).

7. Basta dimostrare che $E_i(\alpha^{\mathcal{A}}) \Rightarrow E_i(\beta^{\mathcal{A}}) \subseteq E_i(\alpha^{\mathcal{A}} \Rightarrow \beta^{\mathcal{A}})$: esercizio 4.4.4 (6).

8. Basta dimostrare che $O_i(\alpha^{\mathcal{A}} \Rightarrow \beta^{\mathcal{A}}) \subseteq E_i(\alpha^{\mathcal{A}}) \Rightarrow E_i(\beta^{\mathcal{A}})$: esercizio 4.4.4 (7).

9. Basta dimostrare che $\alpha^{\mathcal{A}} \Rightarrow E_i(\beta^{\mathcal{A}}) \subseteq E_i(\alpha^{\mathcal{A}} \Rightarrow \beta^{\mathcal{A}})$. Infatti

$$-\alpha^{\mathcal{A}} \cup E_i(\beta^{\mathcal{A}}) \subseteq E_i(-\alpha^{\mathcal{A}}) \cup E_i(\beta^{\mathcal{A}}) = E_i(-\alpha^{\mathcal{A}} \cup \beta^{\mathcal{A}}) = E_i(\alpha^{\mathcal{A}} \Rightarrow \beta^{\mathcal{A}}),$$

dove il primo passaggio dipende dal fatto che $-\alpha^{\mathcal{A}} \subseteq E_i(-\alpha^{\mathcal{A}})$ e il secondo dal teorema 4.4.5 (6).

10. Basta dimostrare che $-O_i(\alpha^{\mathcal{A}}) \cup \beta^{\mathcal{A}} \subseteq E_i(-\alpha^{\mathcal{A}} \cup \beta^{\mathcal{A}})$. Infatti

$$-O_i(\alpha^{\mathcal{A}}) \cup \beta^{\mathcal{A}} \subseteq -O_i(\alpha^{\mathcal{A}}) \cup E_i(\beta^{\mathcal{A}}) = E_i(-\alpha^{\mathcal{A}}) \cup E_i(\beta^{\mathcal{A}}) = E_i(-\alpha^{\mathcal{A}} \cup \beta^{\mathcal{A}}),$$

dove il primo passaggio dipende dal fatto che $\beta^{\mathcal{A}} \subseteq E_i(\beta^{\mathcal{A}})$.

11. In questo esercizio e nei tre seguenti $\alpha^{\mathcal{A}}$ è un punto fisso di O_i e di E_i poiché non contiene libera v_i (teoremi 4.6.6 e 4.6.8). Il risultato segue dal teorema 4.6.9 (1).

12. Il risultato segue dal teorema 4.6.9 (2).

13. Il risultato segue dall'esercizio 4.6.3 (1).

14. Il risultato segue dall'esercizio 4.6.3 (2).

Esercizio 4.6.5 Si dimostri con un contromodello che le formule seguenti non sono logicamente valide:

1. $\forall v_i(\alpha \vee \beta) \to (\forall v_i\, \alpha \vee \forall v_i\, \beta)$,

2. $(\exists v_i\, \alpha \wedge \exists v_i\, \beta) \to \exists v_i(\alpha \wedge \beta)$,

3. $(\forall v_i \alpha \to \forall v_i \beta) \to \forall v_i(\alpha \to \beta)$,

4. $\exists v_i(\alpha \to \beta) \to (\exists v_i \alpha \to \exists v_i \beta)$.

1. Consideriamo P e Q tali che $P^{\mathcal{A}} \cup Q^{\mathcal{A}} = A$, $P^{\mathcal{A}} \neq A$ e $Q^{\mathcal{A}} \neq A$. Allora $(\forall v_i(P(v_i) \vee Q(v_i))^{\mathcal{A}} = A^\omega$ mentre $(\forall v_i\, P(v_i))^{\mathcal{A}} = \emptyset$ e $(\forall v_i\, Q(v_i))^{\mathcal{A}} = \emptyset$.

2. Consideriamo P e Q tali che $P^{\mathcal{A}} \cap Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$, $P^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$ e $Q^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$. Allora $(\exists v_i\, P(v_i)) = A^\omega$ e $(\exists v_i Q(v_i)) = A^\omega$ mentre $(\exists v_i(P(v_i) \wedge Q(v_i)))^{\mathcal{A}} = \emptyset$.

3. Consideriamo P e Q tali che $P^{\mathcal{A}} \not\subseteq Q^{\mathcal{A}}$ e $P^{\mathcal{A}} \neq A$.

4. Consideriamo P e Q tali che $\emptyset \neq P^{\mathcal{A}} \neq A$ e $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$.

Esercizio 4.6.6 Si dimostri che, se t è libero per v_i in α,

$$\models \alpha(v_i/t) \to \exists v_i \alpha.$$

Per il teorema 4.6.3 $\models \forall v_i \neg\alpha \to \neg\alpha(v_i/t)$ e quindi $\models \neg\neg\alpha(v_i/t) \to \neg\forall v_i \neg\alpha$ da cui l'asserto per il teorema 4.6.5 (1).

Esercizio 4.6.7 Si dimostri mediante contromodelli che le restrizioni su v_i nei teoremi 4.6.6, 4.6.10 e nell'esercizio 4.6.4 sono necessarie.

Il caso del teorema 4.6.6 è identico a quello del punto 2 del teorema 4.6.10. Preso P tale che $\emptyset \neq P^{\mathcal{A}} \neq A$ abbiamo $(\forall v_i P(v_i))^{\mathcal{A}} = \emptyset$ mentre $P(v_i)^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$.

Punto 3 del teorema 4.6.10: se $P^{\mathcal{A}} \subseteq Q^{\mathcal{A}}$ allora $(\forall v_i(P(v_i) \to Q(v_i)))^{\mathcal{A}} = A^\omega$, inoltre se supponiamo che $P^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$ e $Q^{\mathcal{A}} \neq A$ abbiamo

$$-P(v_i)^{\mathcal{A}} \cup (\forall v_i Q(v_i))^{\mathcal{A}} = -P(v_i)^{\mathcal{A}} \cup \emptyset \neq A^\omega.$$

Ciò basta per falsificare $(\forall v_i(P(v_i) \to Q(v_i)))^{\mathcal{A}} \subseteq (P(v_i) \to \forall v_i Q(v_i))^{\mathcal{A}}$.

Punto 4 del teorema 4.6.10: se $P^{\mathcal{A}} \subseteq Q^{\mathcal{A}}$ allora $(\forall v_i(P(v_i) \to Q(v_i)))^{\mathcal{A}} = A^\omega$, inoltre se supponiamo $P^{\mathcal{A}} \neq \emptyset$ abbiamo $(\exists v_i P(v_i))^{\mathcal{A}} = A^\omega$. Quindi

$$(\exists v_i P(v_i) \to Q(v_i))^{\mathcal{A}} = -A^\omega \cup Q(v_i)^{\mathcal{A}} = Q(v_i)^{\mathcal{A}},$$

basta allora supporre che sia $Q^{\mathcal{A}} \neq A$ per falsificare l'inclusione

$$(\forall v_i(P(v_i) \to Q(v_i)))^{\mathcal{A}} \subseteq (\exists v_i P(v_i) \to Q(v_i))^{\mathcal{A}}.$$

Punto 5 del teorema 4.6.10: se $\emptyset \neq P^{\mathcal{A}} \neq A$ e $Q^{\mathcal{A}} = \emptyset$ allora

$$(\exists v_i(P(v_i) \to Q(v_i))^{\mathcal{A}} = E_i(-P(v_i)^{\mathcal{A}} \cup Q(v_i)^{\mathcal{A}}) = A^\omega.$$

Inoltre $(P(v_i) \to \exists v_i Q(v_i))^{\mathcal{A}} = -P(v_i)^{\mathcal{A}} \cup E_i(Q(v_i)^{\mathcal{A}}) = -P(v_i)^{\mathcal{A}} \cup E_i(\emptyset) = -P(v_i)^{\mathcal{A}} \neq A^\omega$. Ciò basta per falsificare

$$(\exists v_i(P(v_i) \to Q(v_i))^{\mathcal{A}} \subseteq (P(v_i) \to \exists v_i Q(v_i))^{\mathcal{A}}.$$

Punto 6 del teorema 4.6.10: se $P^{\mathcal{A}} = A$ e $\emptyset \neq Q^{\mathcal{A}} \neq A$ allora $(\exists v_i(P(v_i) \to Q(v_i))^{\mathcal{A}} = A^\omega$. Inoltre

$$(\forall v_i P(v_i) \to Q(v_i))^{\mathcal{A}} = -O_i(P(v_i)^{\mathcal{A}}) \cup Q(v_i)^{\mathcal{A}} = -A^\omega \cup Q(v_i)^{\mathcal{A}} = Q(v_i)^{\mathcal{A}}.$$

Ciò basta per falsificare $(\exists v_i(P(v_i) \to Q(v_i))^{\mathcal{A}} \subseteq (\forall v_i P(v_i) \to Q(v_i))^{\mathcal{A}}$.

Punto 11 dell'esercizio 4.6.4: se $P^{\mathcal{A}} \neq A$, $Q^{\mathcal{A}} \neq A$ e $P^{\mathcal{A}} \cup Q^{\mathcal{A}} = A$ allora $O_i(P(v_i)^{\mathcal{A}} \cup Q(v_i)^{\mathcal{A}}) = A^\omega$ mentre

$$P(v_i)^{\mathcal{A}} \cup O_i(Q(v_i)^{\mathcal{A}}) = P(v_i)^{\mathcal{A}} \cup \emptyset = P(v_i)^{\mathcal{A}}.$$

Punto 12 dell'esercizio 4.6.4: se $\emptyset \neq P^{\mathcal{A}} \neq A$ e $Q = A$ allora $O_i(P(v_i)^{\mathcal{A}} \cap Q(v_i)^{\mathcal{A}}) = O_i(P(v_i)^{\mathcal{A}}) = \emptyset$ mentre

$$P(v_i)^{\mathcal{A}} \cap O_i(Q(v_i)^{\mathcal{A}}) = P(v_i)^{\mathcal{A}} \cap A^\omega = P(v_i)^{\mathcal{A}}.$$

4.7 Conseguenza logica

Esercizio 4.7.1 Si traducano le seguenti inferenze nel linguaggio formale e si verifichi se la conclusione è conseguenza logica delle premesse:

1. "Nessun asino vola", "Giovanni è un asino" $\models$ "Giovanni non vola".

2. "Tutti gli uomini sono mortali", "Dracula è immortale" $\models$ "Dracula non è un uomo".

3. "Tutti gli uomini sono mortali", "Nessun cane è un uomo" $\models$ "Nessun cane è mortale".

1. $\forall v_0(A(v_0) \to \neg V(v_0)), A(c) \models \neg V(c)$, ossia $O_0(-A(v_0)^{\mathcal{A}} \cup -V(v_0)^{\mathcal{A}}) \cap A(c)^{\mathcal{A}} \subseteq -V(c)^{\mathcal{A}}$. Per il teorema 4.6.3

$$O_0(-A(v_0)^{\mathcal{A}} \cup -V(v_0)^{\mathcal{A}}) \subseteq -A(c)^{\mathcal{A}} \cup -V(c)^{\mathcal{A}},$$

quindi

$$\begin{array}{rcl} O_0(-A(v_0)^{\mathcal{A}} \cup -V(v_0)^{\mathcal{A}}) \cap A(c)^{\mathcal{A}} & \subseteq & (-A(c)^{\mathcal{A}} \cup -V(c)^{\mathcal{A}}) \cap A(c)^{\mathcal{A}} \\ & \subseteq & (-A(c)^{\mathcal{A}} \cap A(c)^{\mathcal{A}}) \cup (-V(c)^{\mathcal{A}} \cap A(c)^{\mathcal{A}}) \\ & \subseteq & -V(c)^{\mathcal{A}} \cap A(c)^{\mathcal{A}} \\ & \subseteq & -V(c)^{\mathcal{A}}. \end{array}$$

2. $\forall v_0(U(v_0) \to M(v_0)), \neg M(c) \models \neg U(c)$, ossia $O_0(-U(v_0)^{\mathcal{A}} \cup M(v_0)^{\mathcal{A}}) \cap -M(c)^{\mathcal{A}} \subseteq -U(c)^{\mathcal{A}}$. Per il teorema 4.6.3

$$O_0(-U(v_0)^{\mathcal{A}} \cup M(v_0)^{\mathcal{A}}) \subseteq -U(c)^{\mathcal{A}} \cup M(c)^{\mathcal{A}},$$

e quindi

$$\begin{array}{rcl} O_0(-U(v_0)^{\mathcal{A}} \cup M(v_0)^{\mathcal{A}}) \cap -M(c)^{\mathcal{A}} & \subseteq & (-U(c)^{\mathcal{A}} \cup M(c)^{\mathcal{A}}) \cap -M(c)^{\mathcal{A}} \\ & \subseteq & (-U(c)^{\mathcal{A}} \cap -M(c)^{\mathcal{A}}) \cup \emptyset \\ & \subseteq & -U(c)^{\mathcal{A}} \cap -M(c)^{\mathcal{A}} \\ & \subseteq & -U(c)^{\mathcal{A}}. \end{array}$$

3. Sia $\alpha = \forall v_0(U(v_0) \to M(v_0))$, $\beta = \forall v_0(C(v_0) \to \neg U(v_0))$ e $\gamma = \forall v_0(C(v_0) \to \neg M(v_0))$. Mostriamo che $\alpha, \beta \not\models \gamma$. Poiché si tratta di enunciati possiamo limitarci a trovare una struttura $\mathcal{A}$ che sia modello di α, di β e di $\neg\gamma$. A tale scopo basta osservare che $\neg\gamma \leftrightarrow \exists v_0(C(v_0) \wedge M(v_0))$ e quindi porre, ad esempio, $A = \{a, b\}$, $U^{\mathcal{A}} = \{a\}$, $C^{\mathcal{A}} = \{b\}$ e $M^{\mathcal{A}} = \{a, b\}$.

Esercizio 4.7.2 Sia R una relazione 2-aria. Si dimostri che dalla simmetria e transitività di R non segue la sua riflessività e che dalla irriflessività e transitività di R segue la sua asimmetria. Vale a dire, ponendo

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & \forall v_0\, R(v_0, v_0), \\ \beta & = & \forall v_0 v_1(R(v_0, v_1) \to R(v_1, v_0)), \\ \gamma & = & \forall v_0 v_1 v_2(R(v_0, v_1) \wedge R(v_1, v_2) \to R(v_0, v_2)), \end{array}$$

si dimostri che

1. $\beta, \gamma \not\models \alpha$, *2.* $\forall v_0 \neg R(v_0, v_0), \beta, \gamma \models \forall v_0 v_1 (R(v_0, v_1) \to \neg R(v_1, v_0))$.

1. Sia $\mathcal{A}$ tale che $A = \{a, b\}$ e $R^{\mathcal{A}} = \{(a, a)\}$. Si vede facilmente che $\mathcal{A}$ è modello di β, di γ e di $\neg\alpha$.

2. Per il teorema 4.6.3 vale

$$\gamma^{\mathcal{A}} \subseteq R(v_0, v_1)^{\mathcal{A}} \cap R(v_1, v_0)^{\mathcal{A}} \Rightarrow R(v_0, v_0)^{\mathcal{A}}.$$

Osserviamo che $X \subseteq Y \Rightarrow Z$ implica $X \cap Y \subseteq Z$. In termini di conseguenza logica, $\alpha \models \beta \to \gamma$ implica $\alpha, \beta \models \gamma$: si tratta della seconda formulazione della regola ($\to\vdash$). Possiamo quindi passare a

$$\gamma^{\mathcal{A}} \cap R(v_0, v_1)^{\mathcal{A}} \cap R(v_1, v_0)^{\mathcal{A}} \subseteq R(v_0, v_0)^{\mathcal{A}}.$$

Per la monotonia di $\subseteq$ rispetto a $\cap$ abbiamo

$$\gamma^{\mathcal{A}} \cap R(v_0, v_1)^{\mathcal{A}} \cap R(v_1, v_0)^{\mathcal{A}} \cap -R(v_0, v_0)^{\mathcal{A}} \subseteq R(v_0, v_0)^{\mathcal{A}} \cap -R(v_0, v_0)^{\mathcal{A}}$$

ossia

$$\gamma^{\mathcal{A}} \cap R(v_0, v_1)^{\mathcal{A}} \cap R(v_1, v_0)^{\mathcal{A}} \cap -R(v_0, v_0)^{\mathcal{A}} \subseteq \emptyset.$$

Poiché $X \cap Y \subseteq \emptyset$ implica $X \subseteq -Y$, abbiamo

$$\gamma^{\mathcal{A}} \cap R(v_0, v_1)^{\mathcal{A}} \cap -R(v_0, v_0)^{\mathcal{A}} \subseteq -R(v_1, v_0)^{\mathcal{A}}.$$

Poiché $X \cap Y \subseteq Z$ implica $X \subseteq Y \Rightarrow Z$ (si tratta della regola ($\vdash\to$) che fa passare da $\alpha, \beta \models \gamma$ a $\alpha \models \beta \to \gamma$), abbiamo

$$\gamma^{\mathcal{A}} \cap -R(v_0, v_0)^{\mathcal{A}} \subseteq R(v_0, v_1)^{\mathcal{A}} \Rightarrow -R(v_1, v_0)^{\mathcal{A}}.$$

Per la monotonia di $\subseteq$ rispetto alle operazioni O_i abbiamo

$$O_0(O_1(\gamma^{\mathcal{A}} \cap -R(v_0, v_0)^{\mathcal{A}})) \subseteq O_0(O_1(R(v_0, v_1)^{\mathcal{A}} \Rightarrow -R(v_1, v_0)^{\mathcal{A}}))$$

da cui, distribuendo le operazioni O_i su $\cap$ otteniamo

$$O_0(O_1(\gamma^{\mathcal{A}})) \cap O_0(O_1(-R(v_0, v_0)^{\mathcal{A}})) \subseteq O_0(O_1(R(v_0, v_1)^{\mathcal{A}} \Rightarrow -R(v_1, v_0)^{\mathcal{A}})).$$

Per il teorema 4.6.6 $\alpha^{\mathcal{A}}$ è un punto fisso di O_i se v_i non è libera in α, quindi

$$\begin{aligned} O_0(O_1(\gamma^{\mathcal{A}})) &= \gamma^{\mathcal{A}}, \\ O_1(-R(v_0, v_0)^{\mathcal{A}}) &= -R(v_0, v_0)^{\mathcal{A}} \end{aligned}$$

e quindi

$$\gamma^{\mathcal{A}} \cap O_0(-R(v_0, v_0)^{\mathcal{A}}) \subseteq O_0(O_1(R(v_0, v_1)^{\mathcal{A}} \Rightarrow -R(v_1, v_0)^{\mathcal{A}}))$$

che è quanto volevamo dimostrare.

4.8 Teorie

4.9 Identità

4.10 Saturazione

Esercizio 4.10.1 Per ogni linguaggio del primo ordine $\mathcal{L}$, indichiamo con $\mathcal{L}^-$ il linguaggio ottenuto eliminando da $\mathcal{L}$ i simboli $\forall$ e $=$. Sia ν una funzione che assegna ad ogni formula atomica di $\mathcal{L}^-$ un valore di verità. È possibile estendere ν nel solito modo a una funzione Val_ν definita su tutte le formule di $\mathcal{L}^-$. Definiamo una struttura $\mathcal{A}$ per $\mathcal{L}$ avente come dominio l'insieme Tm dei termini di $\mathcal{L}$ nel modo seguente:

$$c^{\mathcal{A}} = c,$$

$$F^{\mathcal{A}}(t_0, \ldots, t_{n-1}) = F(t_0, \ldots, t_{n-1}),$$

$$P^{\mathcal{A}}(t_0, ..., t_{n-1}) \text{ sse } \nu(P(t_0, ..., t_{n-1})) = 1.$$

Sia s la successione di elementi del dominio costituita da $v_0, v_1, \ldots$. Si dimostri che, per ogni t, $t^{\mathcal{A}}(s) = t$ e, per ogni formula α di $\mathcal{L}^-$,

$$\mathcal{A} \models \alpha[s] \text{ sse } Val_\nu(\alpha) = 1.$$

Dimostriamo che per ogni termine t abbiamo $t^{\mathcal{A}}(s) = t$. La dimostrazione è per induzione su t. Se t è una variabile v_i allora $v_i^{\mathcal{A}}(s) = s(i) = v_i$. Se t è una costante c allora $c^{\mathcal{A}}(s) = c^{\mathcal{A}} = c$. Supponiamo per ipotesi induttiva che $t_i^{\mathcal{A}}(s) = t_i$, allora se t è $F(t_0, \ldots, t_{n-1})$ abbiamo

$$\begin{aligned} F(t_0, \ldots, t_{n-1})^{\mathcal{A}}(s) &= F^{\mathcal{A}}(t_0^{\mathcal{A}}(s), \ldots, t_{n-1}^{\mathcal{A}}(s)) \\ &= F^{\mathcal{A}}(t_0, \ldots, t_{n-1}) \\ &= F(t_0, \ldots, t_{n-1}). \end{aligned}$$

Dimostriamo che per ogni formula α di $\mathcal{L}^-$ vale

$$\mathcal{A} \models \alpha[s] \text{ sse } Val_\nu(\alpha) = 1.$$

La dimostrazione è per induzione su α. Poiché non vi sono equazioni, la base è costituita solo da formule del tipo di $P(t_0, \ldots, t_{n-1})$. Abbiamo allora

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models P(t_0, \ldots, t_{n-1})[s] \quad & \text{sse } P^{\mathcal{A}}(t_0^{\mathcal{A}}, \ldots, t_{n-1}^{\mathcal{A}}) \\ & \text{sse } P^{\mathcal{A}}(t_0, \ldots, t_{n-1}) \\ & \text{sse } \nu(P(t_0, \ldots, t_{n-1})) = 1. \end{aligned}$$

Se α è $\neg\beta$ abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \models \neg\beta[s] \quad & \text{sse} \mathcal{A} \not\models \beta[s] \\ & \text{sse } Val_\nu(\beta) = 0 \\ & \text{sse } Val_\nu(\neg\beta) = 1. \end{aligned}$$

In modo analogo si procede con i restanti connettivi. $\mathcal{L}^-$ non contiene quantificatori.

Esercizio 4.10.2 Si dimostri che ogni formula logicamente valida non contenente né quantificatori né il simbolo dell'identità è una tautologia. (Si utilizzi l'esercizio precedente.)

Supponiamo che α sia logicamente valida e non contenga né $=$ né $\forall$: possiamo quindi supporre che α sia scritta nel linguaggio $\mathcal{L}^-$ dell'esercizio precedente. Supponiamo per assurdo che α non sia una tautologia, allora esisterà una valutazione ν delle formule elementari di $\mathcal{L}^-$ tale che $Val_\nu(\alpha) = 0$. Poiché $\mathcal{L}^-$ non contiene quantificatori, le sue formule elementari coincidono con le atomiche e quindi possiamo identificare ν con la valutazione dell'esercizio precedente: esisterà quindi una struttura $\mathcal{A}$ tale che, scegliendo s come sopra, varrà

$$\mathcal{A} \models \alpha[s] \text{ sse } Val_\nu(\alpha) = 1.$$

Poiché $Val_\nu(\alpha) = 0$ ne segue $\mathcal{A} \not\models \alpha[s]$, contraddicendo l'ipotesi che α sia logicamente valida.

4.11 Calcoli di sequenti

Esercizio 4.11.1 Si dimostri che:

1. $\vdash \exists x \forall y \alpha \to \forall y \exists x \alpha$,

2. $\vdash \forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x \alpha \to \forall x \beta)$,

3. $\vdash \forall x(\alpha \to \beta) \to (\exists x \alpha \to \exists x \beta)$,

4. $\vdash (\alpha \to \exists x \beta) \to \exists x(\alpha \to \beta)$,

5. $\vdash (\forall x \alpha \to \beta) \to \exists x(\alpha \to \beta)$.

1. Possiamo ridurre una dimostrazione del sequente $\emptyset : \exists x \forall y \alpha \to \forall y \exists x \alpha$ a una dimostrazione del sequente $\exists x \forall y \alpha : \forall y \exists x \alpha$. Possiamo ottenere il sequente $\exists x \forall y \alpha : \forall y \exists x \alpha$ dal sequente $\exists x \forall y \alpha : \exists x \alpha$ mediante la regola $(\vdash \forall)$, dato che y non è libera in $\exists x \forall y \alpha$. Possiamo ottenere il sequente $\exists x \forall y \alpha : \exists x \alpha$ dal sequente $\forall y \alpha : \exists x \alpha$ mediante la regola $(\exists \vdash)$, dato che x non è libera in $\exists x \alpha$. Possiamo infine ottenere il sequente $\forall y \alpha : \exists x \alpha$ dai due sequenti $\forall y \alpha : \alpha(y/y)$ e $\alpha(x/x) : \exists x \alpha$ mediante la regola del taglio: $\forall y \alpha : \alpha(y/y)$ è l'assioma $(\forall \vdash)$ mentre $\alpha(x/x) : \exists x \alpha$ si ottiene mediante la regola $(\vdash \exists)$.

2. Possiamo ridurre una dimostrazione del sequente $\emptyset : \forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$ a una dimostrazione del sequente $\forall x(\alpha \to \beta), \forall x\alpha : \forall x\beta$. Poiché x non è libera in $\forall x(\alpha \to \beta)$ ci possiamo ridurre, per il teorema 4.11.3, alla dimostrazione del sequente $\forall x(\alpha \to \beta), \alpha : \beta$ che a sua volta si riduce a $\forall x(\alpha \to \beta) : \alpha \to \beta$ che è un esempio di $(\forall \vdash)$.

3. Possiamo ridurre una dimostrazione di $\emptyset : \forall x(\alpha \to \beta) \to (\exists x\alpha \to \exists x\beta)$ a una dimostrazione di

$$\forall x(\alpha \to \beta), \neg\forall x\neg\alpha : \neg\forall x\neg\beta$$

che per contrapposizione si riduce a $\forall x(\alpha \to \beta), \forall x\neg\beta : \forall x\neg\alpha$ che a sua volta si riduce, per il teorema 4.11.3, a $\forall x(\alpha \to \beta), \neg\beta : \neg\alpha$. Contrapponendo un'altra volta ci si riduce a $\forall x(\alpha \to \beta), \alpha : \beta$ e quindi a $\forall x(\alpha \to \beta) : \alpha \to \beta$, che è un esempio dell'assioma $(\forall \vdash)$.

4. Possiamo ridurre una dimostrazione di $\emptyset : (\alpha \to \exists x\beta) \to \exists x(\alpha \to \beta)$ a una di $(\alpha \to \exists x\beta) : \exists x(\alpha \to \beta)$ ossia di

$$\neg\alpha \vee \neg\forall x\neg\beta : \neg\forall x\neg(\neg\alpha \vee \beta).$$

Poiché

$$\vdash (\neg\alpha \vee \neg\forall x\neg\beta) \leftrightarrow \neg(\alpha \wedge \forall x\neg\beta),$$

possiamo ridurci a dimostrare il sequente

$$\neg(\alpha \wedge \forall x\neg\beta) : \neg\forall x\neg(\neg\alpha \vee \beta).$$

Contrapponendo possiamo ridurci a dimostrare

$$\forall x\neg(\neg\alpha \vee \beta) : \alpha \wedge \forall x\neg\beta.$$

Poiché vale

$$\vdash \neg(\neg\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \alpha \wedge \neg\beta,$$

per il teorema 4.11.7 vale anche

$$\vdash \forall x\neg(\neg\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \forall x(\alpha \wedge \neg\beta),$$

e quindi possiamo ridurci a dimostrare

$$\forall x(\alpha \wedge \neg\beta) : \alpha \wedge \forall x\neg\beta.$$

Poiché

$$\vdash \forall x(\alpha \wedge \neg\beta) \leftrightarrow \forall x\alpha \wedge \forall x\neg\beta,$$

possiamo ridurci a dimostrare

$$\forall x\alpha \wedge \forall x\neg\beta : \alpha \wedge \forall x\neg\beta,$$

sequente che si ottiene facilmente da $\forall x\alpha : \alpha$ e $\forall x\neg\beta : \forall x\neg\beta$.

5. Possiamo ridurre una dimostrazione di $\emptyset : (\forall x\alpha \to \beta) \to \exists x(\alpha \to \beta)$ a una di $\forall x\alpha \to \beta : \exists x(\alpha \to \beta)$ ossia di

$$\neg\forall x\alpha \vee \beta : \neg\forall x\neg(\neg\alpha \vee \beta).$$

Contrapponendo possiamo ridurci a dimostrare

$$\forall x\neg(\neg\alpha \vee \beta) : \neg(\neg\forall x\alpha \vee \beta).$$

Sostituendo formule dimostrabilmente equivalenti, con una procedura analoga a quella adottata al punto precedente, otteniamo prima

$$\forall x(\alpha \wedge \neg\beta) : \forall x\alpha \wedge \neg\beta$$

e poi

$$\forall x\alpha \wedge \forall x\neg\beta : \forall x\alpha \wedge \neg\beta,$$

sequente che si ottiene facilmente da $\forall x\alpha : \forall x\alpha$ e $\forall x\neg\beta : \neg\beta$.

Esercizio 4.11.2 Si dimostri che:

1. $\forall x(M(x) \to T(x)), \exists x(C(x) \wedge M(x)) \vdash \exists x(C(x) \wedge T(x))$,

2. $\forall x(T(x) \to M(x)) \vdash \forall y(\exists x(T(x) \wedge R(y,x)) \to \exists x(M(x) \wedge R(y,x)))$.

1. La dimostrazione del sequente $\forall x(M(x) \to T(x)), \exists x(C(x) \wedge M(x)) : \exists x(C(x) \wedge T(x))$ è riducibile a quella di

$$\forall x(M(x) \to T(x)), C(x) \wedge M(x) : \exists x(C(x) \wedge T(x)),$$

per $(\exists\vdash)$, dato che x non è libera nelle altre formule, e quindi è riducibile a

$$\forall x(M(x) \to T(x)), C(x) \wedge M(x) : C(x) \wedge T(x)$$

utilizzando $(\vdash\exists)$ e la regola del taglio. Sfruttando $(\forall\vdash)$ e la regola del taglio possiamo infine ridurci a

$$M(x) \to T(x), C(x) \wedge M(x) : C(x) \wedge T(x),$$

sequente che si dimostra facilmente attraverso passaggi di logica enunciativa: ponendo $\alpha = M(x)$, $\beta = T(x)$ e $\gamma = C(x)$

$$\dfrac{\alpha \to \beta, \gamma \wedge \alpha : \alpha \qquad \dfrac{\gamma \wedge \alpha : \alpha}{\alpha \to \beta, \gamma \wedge \alpha : \beta}}{\alpha \to \beta, \gamma \wedge \alpha : \gamma \wedge \beta}$$

2. La dimostrazione di $\forall x(T(x) \to M(x))$: $\forall y(\exists x(T(x) \wedge R(y,x)) \to \exists x(M(x) \wedge R(y,x)))$ è riducibile a quella del sequente

$$\forall x(T(x) \to M(x)) : \exists x(T(x) \wedge R(y,x)) \to \exists x(M(x) \wedge R(y,x)),$$

usando $(\vdash \forall)$ e il fatto che x non è libera nell'antecedente, che a sua volta è riducibile a quella del sequente

$$\forall x(T(x) \to M(x)), \exists x(T(x) \wedge R(y,x)) : \exists x(M(x) \wedge R(y,x))$$

attraverso passaggi di logica enunciativa. (È possibile passare da $\alpha : \beta \to \gamma$ ad $\alpha, \beta : \gamma$ nel modo seguente: dall'assioma $\alpha, \beta : \beta$ si passa a $\alpha, \beta, \beta \to \gamma : \gamma$ mediante $(\to\vdash)$ e quindi sfruttando l'ipotesi $\alpha : \beta \to \gamma$ e la regola del taglio si ottiene $\alpha, \beta : \gamma$.) Poiché x non è libera né nell'antecedente né nel conseguente, possiamo ridurci a dimostrare il sequente

$$\forall x(T(x) \to M(x)), T(x) \wedge R(y,x) : \exists x(M(x) \wedge R(y,x))$$

utilizzando $(\exists \vdash)$ e infine, utilizzando $(\forall \vdash)$ e $(\vdash \exists)$ con la regola del taglio, possiamo ridurci al sequente

$$T(x) \to M(x), T(x) \wedge R(y,x) : M(x) \wedge R(y,x),$$

la cui dimostrazione si ottiene attraverso passaggi di logica enunciativa analoghi a quelli utilizzati nel punto precedente.

Esercizio 4.11.3 Si dimostri che non vale $\alpha(x) \vdash \alpha(x/t)$, nemmeno se t è libero per x in α. Si dimostri che vale la seguente regola derivata: se $\alpha(x) \vdash \beta(x)$ allora $\alpha(x/t) \vdash \beta(x/t)$, purché t sia libero per x in α e β.

Se valesse la regola in questione avremmo in particolare $P(v_0) \vdash P(c)$ e quindi, per il teorema di validità, dovrebbe valere anche $P(v_0) \models P(c)$. Abbiamo invece $P(v_0) \not\models P(c)$. Basta infatti considerare una struttura $\mathcal{A} = (A, P^{\mathcal{A}}, c^{\mathcal{A}})$ tale che sia $A = \{a, b\}$, $P^{\mathcal{A}} = \{a\}$ e $c^{\mathcal{A}} = b$ per verificare che $P(v_0)^{\mathcal{A}} \not\subseteq P(c)^{\mathcal{A}}$. Infatti presa una successione s tale che $s_0 = a$, abbiamo $s \in P(v_0)^{\mathcal{A}}$ dato che $s_0 \in P^{\mathcal{A}}$, ma $s \notin P(c)^{\mathcal{A}}$ dato che $P(c)^{\mathcal{A}} = \emptyset$. (Vale $s \in P(c)^{\mathcal{A}}$ sse $c^{\mathcal{A}}(s) \in P^{\mathcal{A}}$ sse $b \in P^{\mathcal{A}}$, dato che $c^{\mathcal{A}}(s) = b$: ma $b \notin P^{\mathcal{A}}$.)

Dimostriamo la regola derivata: se $\alpha(x) \vdash \beta(x)$ allora $\alpha(t) \vdash \beta(t)$, purché t sia libero per x in α e β. Dall'ipotesi segue $\vdash \alpha(x) \to \beta(x)$ e quindi $\vdash \alpha(t) \to \beta(t)$, per il teorema 4.11.4, e infine attraverso passaggi di logica enuciativa $\alpha(t) \vdash \beta(t)$.

Esercizio 4.11.4 La sostituibilità degli identici, che gli assiomi Eq stabiliscono per i simboli funzionali e relazionali, si può generalizzare a termini e formule. Si dimostri che, quando u e q sono liberi per x in α,

1. $\vdash u = q \to t(x/u) = t(x/q)$,

2. $\vdash u = q \to \alpha(x/u) \leftrightarrow \alpha(x/q)$.

1. Per semplificare la notazione poniamo $t' = t(x/u)$ e $t'' = t(x/q)$. Procediamo per induzione su t. Base: t è una variabile o una costante. Se t è una variabile differente da x oppure una costante c, $t' = t$ e $t'' = t$, quindi $\vdash t' = t''$ e $\vdash u = q \to t' = t''$. Se t è proprio x allora $t' = u$ e $t'' = q$ e quindi ciò che dobbiamo dimostrare è $\vdash u = q \to u = q$. Passo induttivo: t è $F(t_0, \dots, t_{n-1})$. Per ipotesi induttiva vale $u = q \vdash t'_i = t''_i$, per ogni $i < n$. Dagli assiomi Eq per sostituzione, vale a dire attraverso il teorema 4.11.4, otteniamo

$$\vdash t'_0 = t''_0 \to \dots \to t'_{n-1} = t''_{n-1} \to F(\dots t'_i \dots) = F(\dots t''_i \dots)$$

e quindi attraverso passaggi di logica enunciativa, sfruttando l'ipotesi induttiva,

$$u = q \vdash F(\dots t'_i \dots) = F(\dots t''_i \dots).$$

2. Procediamo per induzione su α. Base: α è una formula atomica. Caso 1, α è un'equazione $t_0 = t_1$, allora ciò che dobbiamo dimostrare è

$$\vdash u = q \to (t'_0 = t'_1 \leftrightarrow t''_0 = t''_1).$$

Per il punto precedente $u = q \vdash t'_0 = t''_0$ e $u = q \vdash t'_1 = t''_1$ e poiché dagli assiomi Eq otteniamo per sostituzione

$$\vdash t'_0 = t''_0 \to t'_1 = t''_1 \to (t'_0 = t'_1 \leftrightarrow t''_0 = t''_1)$$

ne segue facilmente l'asserto. Caso 2, α è $P(\dots t_i \dots)$, allora ciò che dobbiamo dimostrare è

$$\vdash u = q \to P(\dots t'_i \dots) \leftrightarrow P(\dots t''_i \dots).$$

Per il punto precedente $u = q \vdash t'_i = t''_i$ e poiché dagli assiomi Eq otteniamo per sostituzione

$$\vdash t'_0 = t''_0 \to \dots \to t'_{n-1} = t''_{n-1} \to (P(\dots t'_i \dots) \leftrightarrow P(\dots t''_i \dots))$$

ne segue facilmente l'asserto. Passo induttivo. I casi dei connettivi si ottengono facilmente. Supponiamo ora che α sia $\forall y \beta$. Se x non è libera in α allora $\alpha' = \alpha'' = \alpha$ e quindi ci si riduce a dimostrare $\vdash u = q \to \alpha \leftrightarrow \alpha$, cosa che si ottiene facilmente. Supponiamo quindi che x sia libera in α, allora per ipotesi induttiva

$$\vdash u = q \to (\beta' \leftrightarrow \beta'').$$

e quindi

$$u = q \vdash \beta' \leftrightarrow \beta''.$$

Poiché y non occorre in u né in q, altrimenti u e q non sarebbero liberi per x in $\forall y \beta$, possiamo utilizzare $(\vdash \forall)$ e ottenere

$$u = q \vdash \forall y(\beta' \leftrightarrow \beta'')$$

da cui si ottiene, attraverso passaggi di logica enunciativa e l'esercizio 4.11.1 (2),

$$u = q \vdash \forall y \beta' \leftrightarrow \forall y \beta''.$$

Esercizio 4.11.5 Per ogni t e ogni x non occorrente in t, si dimostri

$$\vdash \exists! x(t = x).$$

Dobbiamo dimostrare $\vdash \exists x(t = x) \wedge \forall xy(t = x \wedge t = y \to x = y)$, dove y è una variabile che non occorre in $t = x$. Iniziamo col dimostrare $\vdash \exists x(t = x)$:

$$\dfrac{\emptyset : t = t \qquad \dfrac{\forall x \neg(t = x) : \neg(t = t)}{t = t : \neg\forall x \neg(t = x)}}{\emptyset : \neg\forall x \neg(t = x)}$$

Quanto a $\vdash \forall xy(t = x \wedge t = y \to x = y)$ osserviamo che dalla transitività dell'identità, garantita dagli assiomi Eq, e dalla regola di sostituzione fornita dal teorema 4.11.4, si ottiene

$$\vdash t = x \to t = y \to x = y$$

da cui l'asserto mediante $(\vdash \forall)$.

4.12 Completezza

4.13 Estensioni definitorie

Esercizio 4.13.1 Si dimostri che gli assiomi G della teoria dei gruppi (si veda il paragrafo 4.8) formulati nel linguaggio $\{\circ, {}^{-1}, n\}$ sono debolmente equivalenti ai seguenti assiomi formulati in $\{\circ, n\}$:

$$\begin{gathered}\forall xyz(x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z),\\ \forall x(x \circ n = x \wedge n \circ x = x),\\ \forall x \exists y(x \circ y = n \wedge y \circ x = n).\end{gathered}$$

L'insieme di assiomi G presentato nel paragrafo 4.8 è formulato in $\mathcal{L}_G = \{\circ, {}^{-1}, n\}$, mentre l'insieme di assiomi presentato nell'esercizio, che indicheremo con H, è formulato in $\mathcal{L}_H = \{\circ, n\}$. Indicheremo con G_i e H_i, $i < 3$, gli assiomi che compongono rispettivamente G e H. Per dimostrare che i due insiemi di assiomi sono debolmente equivalenti occorre dimostrare che esiste un linguaggio $\mathcal{L}'$ ed esistono due insiemi di assiomi G' e H' in $\mathcal{L}'$ tali che:

1. $\mathcal{L}_G \subseteq \mathcal{L}'$ e $\mathcal{L}_H \subseteq \mathcal{L}'$,

2. G' è estensione definitoria di G e H' è estensione definitoria di H,

3. $Cn(G') = Cn(H')$.

Definiamo $\mathcal{L}' = \mathcal{L}_G$. Il punto 1) è evidentemente soddisfatto dato che $\mathcal{L}_H \subseteq \mathcal{L}_G$.

Definiamo $G' = G$, quindi G' è banalmente estensione definitoria di G. Definiamo

$$H' = H \cup \{x^{-1} = y \leftrightarrow x \circ y = n \wedge y \circ x = n\}.$$

Intuitivamente H è stata estesa con un assioma che costituisce una definizione della funzione x^{-1} nei termini di $\mathcal{L}_H$. Sul piano formale dobbiamo dimostrare in H che il definiens $x \circ y = n \wedge y \circ x = n$ soddisfa le condizioni di esistenza e unicità. Occorre quindi dimostrare

$$H \models \forall x \exists y(x \circ y = n \wedge y \circ x = n),$$

che segue banalmente dall'assioma H_2, e

$$H \models \forall xyz((x \circ y = n \wedge y \circ x = n) \wedge (x \circ z = n \wedge z \circ x = n) \rightarrow y = z).$$

Ci limiteremo a fornire, nella teoria dei gruppi assiomatizzata da H, una dimostrazione informale dell'unicità dell'inverso, dalla quale si possono estrarre indicazioni sufficienti per la costruzione di una dimostrazione formale. (Si noti che la dimostrazione informale si limita a provare che ogni struttura che sia modello di H rende vera la condizione di unicità e quindi stabilisce una relazione di conseguenza logica, mentre la dimostrazione formale, che lasciamo al lettore volonteroso, si ottiene costruendo un albero di sequenti secondo le regole del calcolo. È difficile immaginare che si possa sintetizzare una dimostrazione formale senza avere presente una dimostrazione informale.) Sia a un elemento qualsiasi di un gruppo, nell'accezione di gruppo fornita dagli assiomi H, e supponiamo che vi siano due elementi b e c di tale gruppo per i quali valga $ab = n = ba$ e $ac = n = ca$. (Indichiamo con la semplice giustapposizione ab l'operazione $a \circ^{\mathcal{A}} b$ e con n la costante $n^{\mathcal{A}}$.) Dobbiamo dimostrare che $b = c$. Dalle nostre ipotesi segue $ab = ac$ (assiomi Eq). Dall'assioma H_2 sappiamo che esiste un d tale che $da = n$. Da $ab = ac$ segue $d(ab) = d(ac)$ (assiomi Eq) e per H_0 otteniamo $(da)b = (da)c$. Sostituendo da con n otteniamo $nb = nc$ (assiomi Eq) e infine, poiché $nb = b$ e $nc = c$ per H_1, possiamo concludere che $b = c$.

Resta infine da dimostrare che $Cn(G') = Cn(H')$. Iniziamo col dimostrare che $Cn(G') \subseteq Cn(H')$ ossia che $H' \models G_i$ per ogni $i < 3$. I casi di G_0 e di G_1 sono evidenti. Per quanto riguarda G_2 osserviamo che

$$H' \models x^{-1} = y \rightarrow x \circ y = n \wedge y \circ x = n$$

da cui $H' \models x^{-1} = x^{-1} \rightarrow x \circ x^{-1} = n \wedge x^{-1} \circ x = n$ e infine $H' \models G_2$. Mostriamo ora che $Cn(H') \subseteq Cn(G')$. Ovviamente $G' \models H_0$ e $G' \models H_1$. Inoltre $G' \models H_2$ dato che

$$x \circ x^{-1} = n \wedge x^{-1} \circ x = n \models \exists y(\models x \circ y = n \wedge y \circ x = n).$$

Mostriamo infine che

$$G' \models x^{-1} = y \leftrightarrow x \circ y = n \wedge y \circ x = n.$$

Da un lato possiamo dimostrare $G' \models x^{-1} = y \to x \circ y = n \wedge y \circ x = n$ osservando che

$$x \circ x^{-1} = n, x^{-1} = y \models x \circ y = n \;\text{ e }\; x^{-1} \circ x = n, x^{-1} = y \models y \circ x = n$$

utilizzando gli assiomi Eq, e quindi attraverso passaggi di logica enunciativa

$$x \circ x^{-1} = n \wedge x^{-1} \circ x = n, x^{-1} = y \models x \circ y = n \wedge y \circ x = n$$

e quindi, ricordando che G_2 è $x \circ x^{-1} = n \wedge x^{-1} \circ x = n$

$$G_2 \models x^{-1} = y \to x \circ y = n \wedge y \circ x = n.$$

Dall'altro possiamo dimostrare che $G' \models x \circ y = n \wedge y \circ x = n \to x^{-1} = y$ osservando che da $x \circ y = n$ e $x \circ x^{-1} = n$ segue $x \circ y = x \circ x^{-1}$ da cui segue infine $y = x^{-1}$ per la legge di cancellazione (si veda la fine del paragrafo 4.8).

Esercizio 4.13.2 Definiamo la relazione $\Gamma \ll \Gamma'$ sse Γ' è estensione conservativa e traducibile di Γ. Si dimostri che $\ll$ è transitiva. Inoltre, se $\{\Gamma_i\}_{i\in\omega}$ è tale che $\Gamma_i \ll \Gamma_{i+1}$, allora $\bigcup\{\Gamma_i\}_{i\in\omega}$ è estensione conservativa e traducibile di ogni Γ_i.

Mostriamo che se Γ_1 è estensione conservativa di Γ_0 e se Γ_2 è estensione conservativa di Γ_1, allora Γ_2 è estensione conservativa di Γ_0. Sia $\mathcal{L}_i$ il linguaggio in cui è formulato Γ_i, per $i < 3$. Per ipotesi $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$. Supponiamo ora che α sia una formula di $\mathcal{L}_0$ e che $\Gamma_2 \vdash \alpha$: dobbiamo dimostrare che $\Gamma_0 \vdash \alpha$. Poiché α è anche una formula di $\mathcal{L}_1$ e Γ_2 è estensione conservativa di Γ_1, vale $\Gamma_1 \vdash \alpha$. Infine, essendo Γ_1 estensione conservativa di Γ_0, vale $\Gamma_0 \vdash \alpha$.

Mostriamo che se Γ_1 è estensione traducibile di Γ_0 e se Γ_2 è estensione traducibile di Γ_1, allora Γ_2 è estensione traducibile di Γ_0. Per ipotesi esiste una funzione ϕ_0 dalle formule di $\mathcal{L}_1$ verso quelle di $\mathcal{L}_0$ tale che, per ogni formula α di $\mathcal{L}_1$, $\Gamma_1 \vdash \alpha \leftrightarrow \phi_0(\alpha)$, ed esiste una funzione ϕ_1 dalle formule di $\mathcal{L}_2$ verso quelle di $\mathcal{L}_1$ tale che, per ogni formula α di $\mathcal{L}_2$, $\Gamma_2 \vdash \alpha \leftrightarrow \phi_1(\alpha)$. Definiamo $\phi = \phi_0 \circ \phi_1$ e dimostriamo che ϕ è la traduzione cercata. Infatti ϕ associa ad ogni formula di $\mathcal{L}_2$ una formula di $\mathcal{L}_0$. Inoltre, per ogni formula α di $\mathcal{L}_2$ abbiamo $\Gamma_2 \vdash \alpha \leftrightarrow \phi_1(\alpha)$ e $\Gamma_1 \vdash \phi_1(\alpha) \leftrightarrow \phi_0(\phi_1(\alpha))$ e quindi, tendo conto del fatto che Γ_2 è estensione di Γ_1, abbiamo $\Gamma_2 \vdash \alpha \leftrightarrow \phi(\alpha)$.

Mostriamo che $\Gamma = \bigcup\{\Gamma_i\}_{i\in\omega}$ è estensione conservativa di ogni Γ_i. Sia α una formula di $\mathcal{L}_i$ tale che $\Gamma \vdash \alpha$. Per il teorema 3.7.11, che si estende immediatamente al calcolo predicativo, esiste un insieme finito Γ' incluso in Γ tale che $\Gamma' \vdash \alpha$. Poiché i vari Γ_i formano una catena, esiste un n tale che $\Gamma' \subseteq \Gamma_n$ (si veda il lemma 3.9.4) e quindi $\Gamma_n \vdash \alpha$. Per quanto abbiamo visto sopra, Γ_n è estensione conservativa di Γ_i e quindi $\Gamma_i \vdash \alpha$.

Mostriamo infine che Γ è estensione traducibile di ogni Γ_i. Sia $\mathcal{L} = \bigcup\{\mathcal{L}_i\}_{i\in\omega}$ il linguaggio di Γ. Consideriamo ora un dato insieme d'assiomi Γ_i in $\mathcal{L}_i$ e definiamo una funzione di traduzione ϕ_i dalle formule di $\mathcal{L}$ verso le formule di $\mathcal{L}_i$ in modo tale che $\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \phi_i(\alpha)$ per ogni formula α di $\mathcal{L}$. Poiché α è una successione finita di simboli, esiste un n tale che α è una formula di $\mathcal{L}_n$. Se $n \leq i$ allora α è anche una formula di $\mathcal{L}_i$ e quindi definiamo $\phi_i(\alpha) = \alpha$. Se $i < n$ allora, poiché Γ_n è estensione traducibile di Γ_i, esiste una funzione di traduzione ψ_i dalle formule di $\mathcal{L}_n$ verso le formule di $\mathcal{L}_i$ tale che $\Gamma_n \vdash \alpha \leftrightarrow \psi_i(\alpha)$. Poniamo allora $\phi_i(\alpha) = \psi_i(\alpha)$. Abbiamo quindi $\Gamma \vdash \alpha \leftrightarrow \phi_i(\alpha)$.

Esercizio 4.13.3 Si dimostri che per ogni Γ in $\mathcal{L}$ esiste un Γ' in $\mathcal{L}'$ tale che $\mathcal{L}'$ non contiene simboli funzionali e di costante e Γ' è debolmente equivalente a Γ. (Per ogni simbolo funzionale n-ario F si aggiunga un simbolo relazionale $n+1$-ario R_F e un assioma definitorio

$$R_F(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n) \leftrightarrow F(v_0, \ldots, v_{n-1}) = v_n$$

ottenendo una teoria Σ in $\mathcal{L}_\Sigma$. Si definisca una traduzione $^\circ$, analoga a quella del teorema 4.13.5, da $\mathcal{L}_\Sigma$ verso il linguaggio $\mathcal{L}'$ ottenuto eliminando da $\mathcal{L}_\Sigma$ i simboli funzionali. Si consideri come Γ' l'insieme contenente α°, per ogni $\alpha \in \Gamma$, e le condizioni di esistenza e unicità per $R_F(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n)$.)

Supponiamo per semplicità che il linguaggio $\mathcal{L}$ in cui è formulato Γ contenga il solo simbolo funzionale n-ario F e nessun simbolo di costante. (Il caso dei simboli di costante si tratta come quello dei simboli di funzione 0-ari.) Consideriamo il linguaggio $\mathcal{L}^* = \mathcal{L} \cup \{R_F\}$ ottenuto aggiungendo a $\mathcal{L}$ un simbolo relazionale $n+1$-ario. Poniamo per brevità $\delta = R_F(v_0, \ldots, v_{n-1}, v_n)$. In $\mathcal{L}^*$ consideriamo possiamo formulare l'assioma seguente,

$$\delta \leftrightarrow F(v_0, \ldots, v_{n-1}) = v_n,$$

che vincola R_F a denotare il grafo della funzione denotata da F. Definiamo $\Gamma^* = \Gamma \cup \{\delta \leftrightarrow F(v_0, \ldots, v_{n-1}) = v_n\}$. Definiamo inoltre una funzione di traduzione $^\circ$ dalle formule di $\mathcal{L}^*$ verso le formule di $\mathcal{L}' = \mathcal{L}^* - \{F\}$ che elimina il simbolo funzionale F in favore del simbolo relazionale R_F, come nel teorema 4.13.5. Definiamo infine

$$\Gamma' = \{\alpha^\circ : \alpha \in \Gamma\} \cup \{\forall v_0 \ldots v_{n-1} \exists! v_n \delta\}.$$

L'insieme di assiomi Γ' in $\mathcal{L}'$ è debolmente equivalente a Γ. A tale scopo basta dimostrare che Γ^* è simultaneamente estensione definitoria di Γ e Γ'. Il linguaggio $\mathcal{L}^*$ è estensione di $\mathcal{L}$ e $\mathcal{L}'$. Inoltre l'insieme di assiomi Γ^* è simultaneamente estensione definitoria di Γ e di Γ'. Che Γ^* sia estensione definitoria di Γ è evidente, che sia estensione definitoria di Γ' lo si verifica osservando che: i) Γ^* è un'estensione di Γ' perché dimostra tutte le equivalenze $\alpha \leftrightarrow \alpha^\circ$ e contiene tutte le $\alpha \in \Gamma$ e quindi dimostra tutte le $\alpha^\circ \in \Gamma'$, inoltre Γ^* contiene l'assioma $\delta \leftrightarrow F(v_0, \ldots, v_{n-1}) = v_n$ da cui si ricava $\forall v_0 \ldots v_{n-1} \exists! v_n \delta$; ii) Γ' dimostra la condizione di esistenza e unicità per δ e quindi l'assioma $\delta \leftrightarrow F(v_0, \ldots, v_{n-1}) = v_n$, di Γ^* genera un'estensione definitoria.

4.14 Calcoli hilbertiani

Esercizio 4.14.1 Si dimostri che $\mathcal{K}$ è equivalente al calcolo logico predicativo ottenuto rimpiazzando in $\mathcal{K}$ gli assiomi di tipo 1) con tutte le generalizzazioni degli assiomi appartenenti al calcolo logico enunciativo $\mathcal{K}$. Ciò permette di ottenere un calcolo logico predicativo generato da un numero finito di schemi d'assiomi.

Il calcolo predicativo $\mathcal{K}$ introdotto nel paragrafo 4.14 contiene cinque tipi di assiomi: quelli di tipo 1 sono costituiti da tutte le generalizzazioni di tutte le tautologie. Definiamo un calcolo $\mathcal{K}'$ rimpiazzando in $\mathcal{K}$ gli assiomi di tipo 1 con tutte le generalizzazioni delle tautologie che costituiscono uno qualsiasi dei calcoli hilbertiani per la logica enunciativa introdotti nel paragrafo 3.10. (Per esempio il calcolo $\mathcal{F}$, basato solo sui connettivi $\rightarrow$ e $\neg$.) Poiché le tautologie che costituiscono gli assiomi dei calcoli enunciativi sono ottenute da un numero finito di schemi, anche il calcolo $\mathcal{K}'$ così definito sarà costituito da assiomi generati da un numero finito di schemi. È chiaro che tutti gli assiomi di $\mathcal{K}'$ sono assiomi di $\mathcal{K}$ e quindi ogni teorema di $\mathcal{K}'$ è teorema di $\mathcal{K}$. Supponiamo ora che α sia teorema di $\mathcal{K}$. Se tutti gli assiomi che intervengono nella dimostrazione sono anche assiomi di $\mathcal{K}'$, allora la stessa dimostrazione di α si può riprodurre in $\mathcal{K}'$, altrimenti esisteranno in essa degli assiomi κ_i, $i < n$, di tipo 1 di $\mathcal{K}$ che non appartengono a $\mathcal{K}'$. Ogni κ_i sarà una formula di tipo $\forall v_0 \dots v_{n-1}\alpha$, dove α è una tautologia. Ciò significa che $h(\alpha)$, lo schema di α (si veda il paragrafo 4.6), è una formula della logica enunciativa che è una tautologia. Poiché gli assiomi enunciativi da cui abbiamo tratto gli assiomi di tipo 1 di $\mathcal{K}'$ sono in grado di dimostrare tutte le tautologie (teorema di completezza della logica enunciativa), esiste una dimostrazione da tali assiomi di $h(\alpha)$. Se ora sostituiamo ogni variabile enunciativa p_i con $h^{-1}(p_i)$ otteniamo una dimostrazione di α dagli assiomi di $\mathcal{K}'$ da cui otteniamo $\forall v_0 \dots v_{n-1}\alpha$ con una serie di applicazioni della regola di generalizzazione. Quindi ogni κ_i è teorema di $\mathcal{K}'$ e anche α lo è.

4.15 Morfismi e diagrammi

Esercizio 4.15.1 Il monomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è elementare sse esiste $\mathcal{C} \preccurlyeq \mathcal{B}$ tale che $\mathcal{A} \simeq \mathcal{C}$.

Nel teorema 2.2.1 abbiamo dimostrato che se φ è un monomorfismo allora esiste $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ tale che $\mathcal{A} \simeq \mathcal{C}$. La struttura $\mathcal{C}$ era definita nel modo seguente: il dominio C era $\varphi[A]$ e inoltre

1. $R^{\mathcal{C}} = C^n \cap R^{\mathcal{B}}$, R simbolo relazionale n-ario,

2. $F^{\mathcal{C}} = F^{\mathcal{B}} \restriction C^n$, F simbolo funzionale n-ario,

3. $c^{\mathcal{C}} = c^{\mathcal{B}}$.

Mostriamo che $\mathcal{C}$ è anche sottostruttura elementare di $\mathcal{B}$. Per il teorema 4.15.4 possiamo limitarci a dimostrare che per ogni formula $n+1$-aria α e ogni $\overline{c} \in C^n$, se esiste un $b \in B$ tale che $\mathcal{B} \models \alpha[\overline{c}, b]$ allora esiste un $c \in C$ tale che $\mathcal{B} \models \alpha[\overline{c}, c]$. Sia $\overline{a} \in A^n$ tale che $\varphi(a_0) = c_0, \ldots, \varphi(a_{n-1}) = c_{n-1}$. Allora dall'ipotesi $\mathcal{B} \models \alpha[\overline{c}, b]$ segue $\mathcal{B} \models \exists v_n \alpha[\overline{c}]$ e quindi $\mathcal{A} \models \exists v_n \alpha[\overline{a}]$ poiché per ipotesi φ è elementare. Esiste allora un $a \in A$ tale che $\mathcal{A} \models \alpha[\overline{a}, a]$ e quindi $\mathcal{B} \models \alpha[\overline{c}, \varphi(a)]$ poiché φ è elementare. Possiamo quindi porre $c = \varphi(a)$.

Sempre nel teorema 2.2.1 abbiamo mostrato che se esiste una sottostruttura $\mathcal{C}$ di $\mathcal{B}$ tale che $\mathcal{A}$ è isomorfa in φ a $\mathcal{C}$, allora φ è un monomorfismo da $\mathcal{A}$ verso $\mathcal{B}$. Mostriamo che se $\mathcal{C}$ è sottostruttura elementare di $\mathcal{B}$ allora φ è elementare. Per il teorema 4.15.2 vale $\mathcal{A} \models \alpha[\overline{a}]$ sse $\mathcal{C} \models \alpha[\overline{\varphi(a)}]$ dove $\overline{\varphi(a)} = (\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_{n-1}))$. Per ipotesi $\mathcal{C} \preccurlyeq \mathcal{B}$ e quindi id_C è un monomorfismo elementare da $\mathcal{C}$ verso $\mathcal{B}$. La composizione $\varphi = id_C \circ \varphi$ è un monomorfismo elementare da $\mathcal{A}$ verso $\mathcal{B}$.

Esercizio 4.15.2 Se $\varphi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ è un monomorfismo allora esiste un struttura $\mathcal{C}$ tale che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ e un isomorfismo ψ tra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$ tale che $\varphi \subseteq \psi$. Se φ è elementare, possiamo sostituire $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ con $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{B}$.

Completiamo la dimostrazione del teorema 4.15.3, dove abbiamo provato che se φ è un monomorfismo da $\mathcal{A}$ verso $\mathcal{B}$ allora esiste una struttura $\mathcal{C}$ tale che $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}$ e un isomorfismo ψ tra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$ tale che $\varphi \subseteq \psi$. Resta da dimostrare che se φ è elementare allora $\mathcal{A} \preccurlyeq \mathcal{C}$. Per il teorema 4.15.4 basta dimostrare che presa una qualsiasi formula n-aria α e una n-pla $\overline{a} \in A^n$, se esiste un $c \in C$ tale che $\mathcal{C} \models \alpha[\overline{a}, c]$ allora esiste un $a \in A$ tale che $\mathcal{A} \models \alpha[\overline{a}, a]$. Poiché ψ è un isomorfismo tra $\mathcal{C}$ e $\mathcal{B}$ abbiamo $\mathcal{B} \models \alpha[\overline{\psi(a)}, \psi(c)]$ per il teorema 4.15.2: vale dunque $\mathcal{B} \models \exists v_n \alpha[\overline{\psi(a)}]$. Poiché ψ coincide con φ sugli elementi di A abbiamo $\mathcal{B} \models \exists v_n \alpha[\overline{\varphi(a)}]$ da cui si ottiene, essendo φ elementare, $\mathcal{A} \models \exists v_n \alpha[\overline{a}]$. Esiste dunque un $a \in A$ tale che $\mathcal{A} \models \alpha[\overline{a}, a]$.

Esercizio 4.15.3 Si dimostri che $(Q, \leq, \cdot) \not\preccurlyeq (R, \leq, \cdot)$.

Supponiamo per assurdo che valga $(Q, \leq, \cdot) \preccurlyeq (R, \leq, \cdot)$, avremmo allora $(Q. \leq, \cdot) \equiv (R, \leq, \cdot)$. Infatti dal fatto che $(Q, \leq, \cdot) \preccurlyeq (R, \leq, \cdot)$ segue che, per ogni formula 0-aria, ossia per ogni enunciato α,

$$(Q, \leq, \cdot) \models \alpha \text{ sse } (R, \leq, \cdot) \models \alpha$$

e quindi le due strutture risultano essere elementarmente equivalenti. Consideriamo ora l'enunciato $\forall x \exists y (y \cdot y = x)$ che asserisce l'esistenza della radice quadrata di ogni individuo: chiaramente tale enunciato è vero nella struttura avente come dominio i reali e falso in quella avente come dominio i razionali.

Esercizio 4.15.4 Definiamo automorfismo un isomorfismo di una struttura su se stessa. Si dimostrino le proposizioni seguenti.

1. Se φ è un automorfismo e $R \subseteq A^n$ è definibile allora $R(a_0, ..., a_{n-1})$ sse $R(\varphi a_0, ..., \varphi a_{n-1})$.

2. La proprietà "essere un numero naturale" non è definibile in $(R, \leq)$.

3. La relazione $\leq$ non è definibile in $(Z, +, 0)$.

4. La relazione $R(x, y, z)$ sse $x + y = z$ non è definibile in $(\omega, \cdot)$.

1. Supponiamo che R sia definibile in $\mathcal{A}$, allora esiste una formula n-aria α tale che $R(\overline{a})$ sse $\mathcal{A} \models \alpha[\overline{a}]$. Dal teorema 4.15.2 segue $\mathcal{A} \models \alpha[\overline{a}]$ sse $\mathcal{A} \models \alpha[\overline{\varphi(a)}]$ essendo φ un isomorfismo e quindi, per la definibilità di R in $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \models \alpha[\overline{\varphi(a)}]$ sse $R(\overline{\varphi(a)})$.

2. Sia $\mathcal{R}$ la struttura $(R, \leq)$. Supponiamo per assurdo che ω sia definibile in $\mathcal{R}$ e consideriamo l'automorfismo φ da $\mathcal{R}$ verso $\mathcal{R}$ dato da $\varphi(x) = \frac{x}{2}$: chiaramente non vale $r \in \omega$ sse $\varphi(r) \in \omega$ e quindi ω non può essere definibile, per il punto precedente.

3. Sia $\mathcal{Z}$ la struttura $(Z, +, 0)$. Supponiamo per assurdo che $\leq$ sia definibile in $\mathcal{Z}$ e consideriamo l'automorfismo $\varphi(x) = -x$: chiaramente non vale $x \leq y$ sse $-x \leq -y$.

4. Sia $\mathcal{A}$ la struttura $(\omega, \cdot)$. Consideriamo una funzione h dall'insieme dei numeri primi in se stesso che scambia fra loro una coppia di primi. Poniamo, ad esempio, $h(p_i) = p_j$, $h(p_j) = p_i$ e $h(p_n) = p_n$ quando $n \neq i$ e $n \neq j$. Poiché $\mathcal{A}$ è generata dall'insieme dei primi, h si estende a un morfismo φ di $\mathcal{A}$ in se stessa. Poiché ogni naturale si può esprimere come un prodotto di primi, φ è suriettiva. Poiché ogni naturale si può esprimere in un unico modo, a meno dell'ordine dei fattori, come prodotto di primi, φ è iniettiva. A ogni modo di generare n da fattori primi corrisponde un'immagine, ma le varie immagini coincidono perché differiscono fra loro solo per l'ordine dei fattori e il prodotto è commutativo. (Più dettagliatamente: per ogni $n \in \omega$ esiste l'insieme $X = \{x_0, \ldots, x_{k-1}\}$ dei fattori primi di n elencati in ordine di grandezza. Esiste allora un'unica funzione che associa ad ogni $m < k$ il massimo esponente $f(m)$ con cui x_m divide n e quindi n può essere scritto in un unico modo come

$$x_0^{f(1)} \cdot \ldots \cdot x_{k-1}^{f(k-1)}.$$

I vari modi in cui è possibile generare n in $\mathcal{A}$ si ottengono permutando in tutti i modi possibili i fattori del prodotto precedente. Le immagini in φ di queste permutazioni coincidono tutte fra loro dato che il prodotto è commutativo.) Quindi φ è un automorfismo di $\mathcal{A}$. Supponiamo ora che la relazione $x + y = z$ sia definibile in $\mathcal{A}$, allora per il punto 1) vale $x + y = z$ sse $\varphi(x) + \varphi(y) = \varphi(z)$. Abbiamo allora

$$\overbrace{p_i + \ldots + p_i}^{p_j-\text{volte}} = z \text{ sse } \overbrace{p_j + \ldots + p_j}^{p_j-\text{volte}} = \varphi(z)$$

e quindi, essendo $z = p_i \cdot p_j$, abbiamo

$$p_j \cdot p_j = \overbrace{p_j + \ldots + p_j}^{p_j-\text{volte}} = \varphi(p_i \cdot p_j) = \varphi(p_i) \cdot \varphi(p_j) = p_j \cdot p_i,$$

il che è assurdo essendo $p_i \neq p_j$.

Esercizio 4.15.5 Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due strutture per $\mathcal{L}$ allora $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$ se e solo se esiste un insieme di costanti C tale che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono espandibili a due strutture $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$ per $\mathcal{L} \cup C$, in modo che ogni individuo sia denotato da un simbolo di C, e inoltre vale $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$.

Supponiamo che $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ siano isomorfe in φ, allora consideriamo l'insieme di costanti nuove $C = \{c_a\}_{a \in A}$ tale che ogni elemento di A è denotato da un'unica costante c_a di C. Definiamo $\mathcal{L}_A = \mathcal{L} \cup C$ e consideriamo l'espansione $\mathcal{A}' = (\mathcal{A}, a)_{a \in A}$ di $\mathcal{A}$ a $\mathcal{L}_A$ e l'espansione $\mathcal{B}' = (\mathcal{B}, \varphi(a))_{a \in A}$ di $\mathcal{B}$ a $\mathcal{L}_A$. Poiché φ è una biiezione anche ogni elemento di $\mathcal{B}$ è denotato da qualche costante di C (in realtà, da esattamente una costante). Inoltre $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$ sono isomorfe in φ: infatti φ è un isomorfismo tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, quindi resta solo da verificare che conserva le costanti nuove, ossia che $\varphi(c_a^{\mathcal{A}'}) = \varphi(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$. Poiché l'isomorfismo implica l'equivalenza elementare (teorema 4.15.2), ne segue che $\mathcal{A}' \equiv \mathcal{B}'$.

Supponiamo ora che C sia un insieme di costanti tale che ogni individuo di A e di B sia denotato da una costante di C. Non assumiamo che ogni individuo sia denotato da un'unica costante, come accade invece quando si definisce il diagramma di una struttura, quindi per ogni individuo $x \in A \cup B$ possono esistere due costanti distinte c_x e d_x appartenenti a C che denotano x. Dimostriamo che se le espansioni $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$ di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ a $\mathcal{L} \cup C$ (non indichiamo $\mathcal{L} \cup C$ con $\mathcal{L}_A$ perché riserviamo quest'ultima notazione al linguaggio dei diagrammi, in cui ogni individuo della struttura è denotato da un'unica costante) sono equivalenti allora la funzione $\varphi : A \to B$ così definita è un isomorfismo tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$: per ogni $a \in A$ scegliamo una costante $c_a \in C$ tale che $a = c_a^{\mathcal{A}'}$ e poniamo $\varphi(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$. Verifichiamo che φ è una funzione, ossia che la definizione associa ad ogni individuo $a \in A$ un unico valore. Infatti se a è il denotato di due costanti $c_a, d_a \in C$ allora abbiamo contemporaneamente $\varphi(a) = c_a^{\mathcal{B}'}$ e $\varphi(a) = d_a^{\mathcal{B}'}$, ma essendo $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$ equivalenti l'equazione $c_a = d_a$ è vera in $\mathcal{A}'$ quanto in $\mathcal{B}'$ e quindi il valore che φ associa ad a è unico. Verifichiamo che φ è iniettiva. Basta osservare che una disequazione $\neg c_a = c_b$ è vera in $\mathcal{A}'$ sse è vera in $\mathcal{B}'$. Dimostriamo che φ è suriettiva. Sia $b \in B$: per ipotesi esiste una costante $c_b \in C$ tale che $b = c_b^{\mathcal{B}'}$. D'altra parte c_b possiede anche un'interpretazione in $\mathcal{A}'$: $c_b^{\mathcal{A}'} = a$. Per definizione $\varphi(a) = c_b^{\mathcal{B}'} = b$. A questo punto è facile vedere che φ è un isomorfismo tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tenendo presente l'equivalenza elementare tra $\mathcal{A}'$ e $\mathcal{B}'$. Per ogni funzione $F^{\mathcal{A}}$ e ogni n-pla $a_0, ..., a_{n-1}$ di elementi di A,

$$\begin{aligned}
F^{\mathcal{A}}(a_0, ..., a_{n-1}) = b \qquad & \text{sse } \mathcal{A}' \models F(c_{a_0}, \ldots, c_{a_{n-1}}) = c_b \\
& \text{sse } \mathcal{B}' \models F(c_{a_0}, \ldots, c_{a_{n-1}}) = c_b \\
& \text{sse } F^{\mathcal{B}'}(c_{a_0}^{\mathcal{B}'}, \ldots, c_{a_{n-1}}^{\mathcal{B}'}) = c_b^{\mathcal{B}'} \\
& \text{sse } F^{\mathcal{B}}(\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_{n-1})) = \varphi(b).
\end{aligned}$$

Quindi $\varphi(F^{\mathcal{A}}(a_0, ..., a_{n-1})) = F^{\mathcal{B}}(\varphi(a_0), \ldots, \varphi(a_{n-1}))$. In modo simile si procede con relazioni e costanti.

Esercizio 4.15.6 Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono due strutture finite di tipo finito, allora $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ implica $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

Se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono strutture di cardinalità finita ed elementarmente equivalenti, allora hanno la medesima cardinalità finita. Infatti se A contiene n oggetti allora $\mathcal{A}$ rende vero l'enunciato $E_{!n}$ che asserisce l'esistenza di esattamente n oggetti (si veda il paragrafo 4.8), ma allora tale enunciato è vero anche in $\mathcal{B}$ e quindi anche B contiene n oggetti. Sia $\Delta_{\mathcal{A}}$ il diagramma di $\mathcal{A}$. Poiché A è finito e il tipo di $\mathcal{A}$ è finito, $\Delta_{\mathcal{A}}$ contiene un numero finito di formule, quindi esiste una formula $\alpha(v_0, ..., v_{n-1})$ di $\mathcal{L}$ tale che

$$\alpha(c_{a_0}, \ldots, c_{a_{n-1}}) = \bigwedge\{\delta : \delta \in \Delta_{\mathcal{A}}\}.$$

Da $\mathcal{A}' \models \Delta_{\mathcal{A}}$ segue $\mathcal{A}' \models \alpha(c_{a_0}, \ldots, c_{a_{n-1}})$ e quindi $\mathcal{A} \models \exists v_0, ..., v_{n-1}\alpha$ da cui $\mathcal{B} \models \exists v_0, ..., v_{n-1}\alpha$ per l'equivalenza elementare. Esistono dunque $a_0, ..., a_{n-1}$ e $b_0, ..., b_{n-1}$ che soddisfano α rispettivamente in $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Poniamo $\varphi(a_i) = b_i$ e dimostriamo che è un isomorfismo tra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Innanzitutto i vari a_i sono tutti distinti fra loro, dato che $\Delta_{\mathcal{A}}$ contiene tutte le disequazioni tra costanti nuove distinte e quindi tra i congiunti di α figurano tutte le possibili disequazioni $v_i \neq v_j$, per $i \neq j$. Inoltre ogni elemento di A figura tra gli a_i dato che A contiene n oggetti e gli a_i sono in numero n e tutti diversi fra loro. Lo stesso vale per i b_i. Ciò dimostra che φ è una biiezione tra A e B. La conservazione di costanti, funzioni e relazioni si ottiene ragionando come nell'esercizio precedente.

4.16 Compattezza

Esercizio 4.16.1 Procedendo come nel teorema 4.16.1, si dimostri che $Th(\mathcal{N})$ ha un modello $\mathcal{A}$ non isomorfo a $\mathcal{N}$ e che quindi esistono strutture elementarmente equivalenti non isomorfe.

Possiamo procedere come nel teorema 4.16.1 aggiungendo al linguaggio dell'aritmetica un insieme $\{d_\eta\}_{\eta\in\xi}$ di simboli di costante nuovi avente cardinalità più che numerabile. Definiamo

$$\Gamma = \{d_\eta \neq d_\theta : \eta, \theta \in \xi, \eta \neq \theta\}$$

e quindi consideriamo l'insieme di assiomi $Th(\mathcal{N}) \cup \Gamma$: tale insieme è finitamente soddisfacibile (basta espandere $\mathcal{N}$ con l'aggiunta di un numero finito di costanti nuove) e quindi possiede un modello, per il teorema di compattezza, che avrà cardinalità più che numerabile essendo vere in esso tutte le disequazioni di Γ. La riduzione di tale modello al linguaggio dell'aritmetica è un modello di $Th(\mathcal{N})$ e quindi è una struttura elementarmente equivalente a $\mathcal{N}$, ma non è isomorfa a $\mathcal{N}$ avendo cardinalità più che numerabile.

Se consideriamo semplicemente il linguaggio $\mathcal{L} \cup \{d\}$ ottenuto aggiungendo al linguaggio dell'Aritmetica $\mathcal{L}$ un solo simbolo di costante nuovo e l'insieme di assiomi

$$\Gamma = \{c \neq S^n(0) : n \in \omega\}$$

otteniamo, ragionando come sopra, un modello di $\Gamma \cup Th(\mathcal{N})$ elementarmente equivalente a $\mathcal{N}$ ma non isomorfo a $\mathcal{N}$ perché dovrà contenere un oggetto, l'interpretazione di c, diverso da ogni numero naturale. Questa volta non è necessario che la cardinalità del modello trovato sia più che numerabile, anzi, applicando il teorema 4.18.1, possiamo dimostrare che esiste un modello numerabile di $\Gamma \cup Th(\mathcal{N})$. In breve, poiché $\Gamma \cup Th(\mathcal{N})$ ha un modello è anche coerente e quindi, per il teorema di completezza, possiede un modello costituito dalla struttura canonica per $\mathcal{L} \cup \{d\}$. La cardinalità della struttura canonica è minore o uguale a quella dell'insieme dei termini del linguaggio e poiché $\mathcal{L} \cup \{d\}$ è numerabile sarà anch'essa numerabile. In conclusione, esistono modelli dell'Aritmetica che sono non standard pur essendo numerabili.

Esercizio 4.16.2 Si dimostri che:

1. Se Γ ha solo modelli finiti allora ne ha uno di cardinalità massima.

2. La classe dei modelli infiniti è assiomatica ma non elementare.

3. Se $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ non ha modelli allora esiste un α tale che $\Gamma_0 \models \alpha$ e $\Gamma_1 \models \neg\alpha$.

1. Se non esiste un modello di Γ di cardinalità massima, allora Γ ha modelli finiti arbitrariamente grandi e quindi, per il teorema 4.16.2, ha anche modelli infiniti, contro l'ipotesi.

2. Consideriamo $\Gamma = \{\exists_{\geq n} : n \in \omega\}$ dove $\exists_{\geq n}$ è la formula che asserisce l'esistenza di almeno n oggetti distinti (si veda il paragrafo 4.8). Ogni modello di Γ deve essere infinito e, viceversa, ogni struttura infinita è modello di Γ, quindi la classe dei modelli infiniti è assiomatica poiché coincide con $M(\Gamma)$. D'altra parte non esiste un singolo enunciato α tale che la classe dei modelli infiniti coincida con $M(\alpha)$: se un tale α esistesse allora $M(\neg\alpha)$ sarebbe la classe dei modelli finiti, ma dal teorema 4.16.2 sappiamo che la classe dei modelli finiti non è assiomatica e quindi nemmeno elementare.

3. Se $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ non ha modelli allora esiste un suo sottoinsieme finito Σ che non ha modelli (altrimenti, se ogni suo sottoinsieme finito fosse soddisfacibile, per il teorema di compattezza anche $\Gamma_0 \cup \Gamma_1$ avrebbe un modello). Esistono allora due sottoinsiemi finiti $\Sigma_0 \subseteq \Gamma_0$ e $\Sigma_1 \subseteq \Gamma_1$ tali che $\Sigma_0 \cup \Sigma_1 = \Sigma$. Sia α la congiunzione di tutte le formule di Σ_0 e β la congiunzione di tutte le formule di Σ_1, allora $\alpha \wedge \beta$ è equivalente a $\Sigma_0 \cup \Sigma_1$ e quindi non ha modelli. Osserviamo allora che ogni modello di Σ_0 è modello di α e quindi $\Sigma_0 \models \alpha$, mentre ogni modello di Σ_0 non è modello di β (altrimenti $\alpha \wedge \beta$ avrebbe un modello) e quindi $\Sigma_0 \models \neg\beta$. Quindi $\Gamma_0 \models \alpha$ e $\Gamma_0 \models \neg\beta$ e $\Gamma_0 \models \alpha \wedge \neg\beta$. D'altra parte ogni modello di Σ_1 è modello di β e quindi $\Sigma_1 \models \beta$ da cui $\Sigma_1 \models \neg\alpha \vee \beta$ e infine $\Gamma_1 \models \neg\alpha \vee \beta$. Ma per la legge di De Morgan $\neg(\alpha \wedge \neg\beta)$ è equivalente a $\neg\alpha \vee \beta$ e quindi $\alpha \wedge \neg\beta$ è la formula cercata.

Esercizio 4.16.3 Si esprimano i concetti di ordine parziale e di ordine totale rispettivamente con un enunciato α e un enunciato β.

1. Si dimostri che ogni ordine parziale finito si può estendere a un ordine totale. In altri termini, se $\mathcal{A} \models \alpha$ e $\mathcal{A}$ è finito, allora esiste una struttura $\mathcal{B}$ tale che $A = B$, la relazione $\leq^{\mathcal{A}}$ è inclusa nella relazione $\leq^{\mathcal{B}}$ e inoltre $\mathcal{B} \models \beta$. (Per induzione su $|A|$.)

2. Si dimostri per mezzo del teorema di compattezza che ogni ordine parziale si può estendere a un ordine totale. (Si consideri l'insieme Δ' ottenuto eliminando dal diagramma atomico dell'ordine parziale tutti gli enunciati negati tranne le disequazioni e si dimostri che $\Delta' \cup \{\beta\}$ ha un modello $\mathcal{B}$: si usi l'ordinamento totale di B per indurre un ordinamento totale su A.)

1. Dimostriamo che, per ogni $n > 0$, ogni ordine parziale finito $\leq$ su un insieme A di cardinalità n può essere esteso a un ordine totale $\leq'$ sul medesimo insieme. Se $n = 1$ allora non c'è nulla da dimostrare perché ogni ordine parziale su un oggetto è anche totale. Sia $n = k + 1$ la cardinalità di A, allora consideriamo un punto $a \in A$ e definiamo $W = A - \{a\}$. Consideriamo la relazione d'ordine parziale $\sqsubseteq$ ottenuta restringendo $\leq$ a W, ossia eliminando da $\leq$ le coppie contenenti a. Poiché W ha cardinalità minore di n, per ipotesi induttiva è possibile estendere $\sqsubseteq$ a una relazione di ordine totale $\sqsubseteq'$ su W. Resta da collocare l'elemento a in modo tale che sia confrontabile con ogni elemento di W e che siano conservate le relazioni con gli elementi di W eventualmente stabilite da $\leq$. Le coppie appartenenti a $\leq$ che contengono a possono essere divise in tre tipi:

1. le coppie (x, a) con $x \in W$,
2. le coppie (a, x) con $x \in W$,
3. la coppia (a, a).

Poiché $\leq$ è riflessiva, la coppia di tipo 3) è l'unica necessariamente presente in $\leq$, mentre quelle di tipo 1) e 2) possono mancare: se mancano quelle di tipo 1) allora a è un elemento minimale rispetto a $\leq$, se mancano quelle di tipo 2) è un elemento massimale. Definiamo $a^+ = \min\{x : a < x\}$, dove min è preso rispetto all'ordine totale $\sqsubseteq'$. Disporremo gli elementi di A in una relazione d'ordine totale che disporrà gli elementi di W secondo $\sqsubseteq'$ e collocherà a come immediato predecessore si a^+. Iniziamo col definire una relazione $\leq^\circ$ su A ponendo

$$\leq^\circ = \ \sqsubseteq' \cup \{(a,a)\} \cup \{(a,x) : x \in W,\, a^+ \sqsubseteq' x\} \cup \{(x,a) : x \in W,\, x \sqsubset' a^+\}.$$

Dimostriamo che $\leq^\circ$ estende $\leq$. Le coppie appartenenti a $\leq$ si possono dividere in coppie non contenenti a e coppie contenenti a: le prime appartengono a $\sqsubseteq$ e quindi a $\sqsubseteq'$ e infine a $\leq^\circ$, le seconde sono ripartite nei tre tipi individuati in precedenza. Se si tratta di una coppia di tipo 1), allora sarà (x, a) con $x \in W$. Per definizione di a^+ vale $a < a^+$. Poiché per ipotesi $x \leq a$, ne segue $x < a^+$. Poiché $\sqsubseteq$ è la restrizione di $\leq$ a W, e x e a^+ appartengono a W, vale $x \sqsubset' a^+$, ma allora (x, a) appartiene a $\leq^\circ$. Se si tratta di una coppia di tipo 2), allora sarà (a, x) con $x \in W$. Poiché $x \in W$ implica $x \neq a$, la nostra ipotesi $a \leq x$

è in realtà $a < x$, quindi, per definizione di a^+, $a^+ \sqsubseteq' x$. Ne segue che (a, x) appartiene a $\leq^\circ$. Infine la coppia di tipo 3) appartiene per definizione a $\leq^\circ$.

Dimostriamo che $\leq^\circ$ è una relazione connessa su A. Presi x e y appartenenti ad A, se appartengono a W sono per ipotesi confrontabili in $\sqsubseteq'$ e quindi in $\leq^\circ$. Se entrambi coincidono con a allora vale per definizione $a \leq^\circ a$. Supponiamo infine che uno di essi sia a e l'altro un elemento di W, ossia $x = a$ e $y \in W$. Poiché y e a^+ appartengono entrambi a W sono confrontabili rispetto a $\sqsubseteq'$: se vale $y \sqsubset' a^+$ allora $y \leq^\circ a$, se $a^+ \sqsubseteq' y$ allora $a \leq^\circ y$.

La relazione $\leq^\circ$ è quindi una relazione su A che è riflessiva, connessa ed estende $\leq$, ma non è detto che sia un ordine perché non è necessariamente transitiva e antisimmetrica. Ogni relazione R su A può essere estesa a una relazione transitiva nel modo seguente. Diremo che una successione $(a_0, ..., a_{n-1})$ è una R-successione se, per ogni $i < n-1$, vale $a_i R a_{i+1}$. Definiamo chiusura transitiva di R la relazione R^{τ} costituita da tutte le coppie (x, y) tali che esiste una R-successione che inizia con x e finisce con y, ossia $xR^{\tau}y$ sse esiste una successione finita $(a_0, ..., a_{n-1})$ di elementi di A tale che $x = a_0$, $y = a_{n-1}$ e, per ogni $i < n-1$, $a_i R a_{i+1}$. Ovviamente $R \subseteq R^{\tau}$. Inoltre R^{τ} è transitiva: se $xR^{\tau}y$ e $yR^{\tau}z$ allora concatenando le R-successioni che conducono da x a y e da y a z si ottiene una R-successione che conduce da z a z e quindi $xR^{\tau}z$. Possiamo quindi estendere $\leq^\circ$ alla sua chiusura transitiva $(\leq^\circ)^{\tau}$ che è una relazione su A riflessiva, transitiva e connessa.

Resta da dimostrare che $(\leq^\circ)^{\tau}$ è anche antisimmetrica. Se R è una relazione su A, chiamiamo *ciclo* di lunghezza n una R-successione finita senza ripetizioni $(x_0, ..., x_{n-1})$ di elementi di A tale che $x_{n-1} R x_0$. Se R è riflessiva, allora ogni punto di A è un ciclo di lunghezza 1.

Lemma 1. La relazione R è antisimmetrica sse non esistono cicli di lunghezza 2.

Supponiamo che R sia antisimmetrica. Se (x_0, x_1) fosse un ciclo avremmo $x_0 R x_1$ e $x_1 R x_0$, ma allora $x_0 = x_1$, quindi (x_0, x_1) non è un ciclo, perché i suoi elementi non sono distinti. Supponiamo ora che R non abbia cicli di lunghezza 2, allora da aRb e bRa scende $a = b$, altrimenti (a, b) sarebbe un ciclo di lunghezza 2.

Lemma 2. Per ogni R-successione esiste una R-successione senza ripetizioni che ha lo stesso elemento iniziale e lo stesso elemento finale.

Se $\bar{x} = (x_0, ..., x_{n-1})$ contiene ripetizioni, basta eliminare gli elementi compresi tra due oggetti ripetuti, e uno di tali oggetti, per ottenere una R-successione con un numero minore di ripetizioni avente lo stesso elemento iniziale e lo stesso elemento finale di $\bar{x}$. Ad esempio, se x_i è uguale a x_j, con $i < j$, allora la successione che otteniamo è

$$(x_0, \ldots, x_i, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1}).$$

Iterando un numero finito di volte questa procedura si ottiene alla fine una successione senza ripetizioni che inizia e finisce come $\bar{x}$. Per rendere più precisa questa argomentazione, soprattutto riguardo al numero finito di iterazioni necessarie per ottenere il risultato, occorre associare a ogni successione

$\bar{x} = (x_0, ..., x_{n-1})$ un numero $k(\overline{x})$ che esprime il numero di ripetizioni in $\bar{x}$. Ad esempio, se a occorre tre volte in $\bar{x}$ diremo che a ha 2 ripetizioni. Definiamo allora una funzione $f : n \to n$ ponendo

$$f(0) = 0 \text{ e } f(i+1) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_j \neq x_{i+1} \text{ per ogni } j \leq i, \\ 1 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Poniamo infine $k(\bar{x}) = \Sigma\{f(i) : i < n\}$. Consideriamo ora un successione $\bar{x}$, se $k(\bar{x}) = 0$ allora non ci sono ripetizioni, se $k(\bar{x}) \neq 0$ allora consideriamo il minimo i tale che $f(i) = 1$. Esisterà quindi un $j < i$ tale che $x_j = x_i$ e poniamo

$$\bar{x}' = (x_0, ..., x_j, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}).$$

Chiaramente $\bar{x}'$ è ancora un R-successione che inizia e finisce come $\bar{x}$, inoltre $k(\bar{x}') < k(\bar{x})$. Questo assicura che la procedura termini dopo un numero finito di iterazioni.

Lemma 3. Se la relazione R non ha cicli di lunghezza maggiore di 1, allora la sua chiusura transitiva R^τ è antisimmetrica.

Per il lemma 1 basta dimostrare che R^τ non ha cicli di lunghezza 2. Supponiamo per assurdo che (a, b) sia un ciclo di R^τ, ossia che $a \neq b$, $aR^\tau b$ e $bR^\tau a$. Per definizione di chiusura transitiva esistono due R-successioni $\overline{x}$ e $\overline{y}$ tali che $x_0 = a$, $x_{n-1} = b$ e $y_0 = b$, $y_{m-1} = a$. Per il lemma 2 possiamo supporre che non contengano ripetizioni. Consideriamo ora la R-successione

$$\overline{z} = (x_0, ..., x_{n-1}, y_1, \dots, y_{m-2}).$$

Se $\overline{z}$ non contiene ripetizioni allora è un ciclo di R, dato che $y_{m-2}Ra$ e $x_0 = a$. Inoltre è un ciclo di lunghezza > 1 dato che $(x_0, ..., x_{n-1})$ ha almeno lunghezza 2, essendo $a \neq b$. Se $\overline{z}$ contiene ripetizioni applichiamo il lemma 2 ottenendo una successione $\overline{w}$ senza ripetizioni che inizia e finisce come $\overline{z}$ e quindi è un ciclo di R. La lunghezza del ciclo sarà ancora > 1. Infatti la successione di partenza $\overline{z}$ ha lunghezza ≥ 2 e inoltre x_0, il primo elemento di $\overline{z}$, è certamente differente dall'ultimo, y_{m-2}, poiché $x_0 = a$ e $y_{m-2} \neq a$ essendo $y_{m-1} = a$ e $\overline{y}$ senza ripetizioni. Poiché $\overline{w}$ inizia e finisce come $\overline{z}$, contiene almeno 2 oggetti e quindi avrà lunghezza ≥ 2. Quindi in ogni caso abbiamo contraddetto l'ipotesi che R non avesse cicli di lunghezza > 1.

Siamo ora in grado di dimostrare che $(\overset{\circ}{\leq})^\tau$ è antisimmetrica e quindi è la relazione d'ordine totale richiesta: per il lemma 3 basta verificare che $\overset{\circ}{\leq}$ non ha cicli di lunghezza > 1. Supponiamo che $(a_0, ..., a_{n-1})$ sia un ciclo di $\overset{\circ}{\leq}$. Se tutti gli a_i sono diversi da a allora possiamo rimpiazzare $\overset{\circ}{\leq}$ con $\sqsubseteq'$, ma $\sqsubseteq'$ non ha cicli di lunghezza > 1 perché è antisimmetrica (lemma 1). Supponiamo quindi che qualche a_i coincida con a, allora esattamente uno di essi coincide con a perché in un ciclo non vi sono ripetizioni. Il nostro ciclo sarà quindi la $\overset{\circ}{\leq}$-successione

$$(a_0, ..., a_{i-1}, a, a_{i+1}, \dots, a_{n-1}).$$

Dalla definizione di $\leq^{\circ}$ sappiamo che $a_{i-1} \leq^{\circ} a$ sse $a_{i-1} \sqsubset' a^+$ e $a \leq^{\circ} a_{i+1}$ sse $a^+ \sqsubseteq' a_{i+1}$. Possiamo allora ottenere la $\sqsubseteq'$-successione

$$(a_0, ..., a_{i-1}, a^+, a_{i+1}, \ldots, a_{n-1})$$

che sarà un ciclo di $\sqsubseteq'$, il che tuttavia è assurdo essendo $\sqsubseteq'$ antisimmetrica.

2. Sia α l'enunciato di $\mathcal{L} = \{\leq\}$ costituito dalla congiunzione dei tre assiomi OP introdotti nel paragrafo 4.8 per assiomatizzare la classe degli ordini parziali. I tre assiomi stabiliscono che l'interpretazione di $\leq$ deve essere una relazione riflessiva, antisimmetrica e transitiva. Sia β l'enunciato ottenuto congiungendo i quattro assiomi dell'insieme OT che assiomatizza la classe degli ordini totali (si veda il paragrafo 4.8): β è ottenuto congiungendo α con l'assioma che stabilisce la connessione della relazione che interpreta $\leq$. Supponiamo che $\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$ sia un insieme parzialmente ordinato. Sia Δ' l'insieme di formule ottenuto eliminando dal diagramma atomico di $\mathcal{A}$ tutti gli enunciati negati, tranne le disequazioni. Per il teorema di compattezza e per il punto 1) l'insieme di enunciati $\Delta' \cup \{\beta\}$ ha un modello $\mathcal{B} = (B, \leq^{\mathcal{B}})$. Basta dimostrare che ogni sottoinsieme finito $X \subseteq \Delta' \cup \{\beta\}$ ha un modello. Se $c_{a_0}, \ldots, c_{a_{n-1}}$ sono le costanti nuove coinvolte negli enunciati di X, basta considerare l'insieme $A' = \{a_0, ..., a_{n-1}\}$ e la restrizione $\leq'$ di $\leq^{\mathcal{A}}$ a tale insieme per ottenere un insieme finito parzialmente ordinato $\mathcal{A}' = (A', \leq')$. Per il punto 1) è possibile estendere $\leq'$ a un ordine totale su A' ossia ottenere un insieme totalmente ordinato $\mathcal{B}' = (A', \leq^{\circ})$ tale che $\leq' \subseteq \leq^{\circ}$. Se espandiamo $\mathcal{B}'$ al linguaggio di X aggiungendo le interpretazioni delle costanti nuove, otteniamo $(\mathcal{B}', a_0, ..., a_{n-1})$ che è modello di X. Infatti ogni formula di tipo $c_{a_i} \leq c_{a_j}$ di Δ' appartenente a X è vera dato che $\leq' \subseteq \leq^{\circ}$, mentre le disequazioni sono conservate poiché gli a_i sono tutti distinti. Sia ora $\mathcal{B} = (B, \leq^{\mathcal{B}})$ un modello di $\Delta' \cup \{\beta\}$. Consideriamo l'insieme $\{c_a^{\mathcal{B}} : a \in A\} \subseteq B$, ossia le interpretazioni in $\mathcal{B}$ di tutte le costanti nuove, e consideriamo la funzione ϕ da A verso $\{c_a^{\mathcal{B}} : a \in A\}$ definita ponendo $\phi(a) = c_a^{\mathcal{B}}$. Si vede facilmente che ϕ è iniettiva, dato che $\mathcal{B}$ è modello di tutte le disequazioni vere in $\mathcal{A}$, ed è suriettiva, dato che $c_a^{\mathcal{B}}$ è immagine di a. Inoltre ϕ conserva $\leq^{\mathcal{A}}$ dato che se $a \leq^{\mathcal{A}} a'$ allora $c_a \leq c_{a'}$ appartiene a Δ' e quindi è vera in $\mathcal{B}$, perciò $c_a^{\mathcal{B}} \leq^{\mathcal{B}} c_{a'}^{\mathcal{B}}$. Useremo allora ϕ^{-1} per indurre un ordine su A che, per quanto abbiamo appena visto, estenderà l'ordine $\leq^{\mathcal{A}}$ preesistente, e lo estenderà a un ordine totale dato che $\mathcal{B}$ è modello di β.

Esercizio 4.16.4 Si dimostri che se K è elementare e $K = Mod(\Gamma)$ allora esiste un sottoinsieme finito Γ' di Γ tale che $K = Mod(\Gamma')$.

Per ipotesi esiste un enunciato α tale che $K = Mod(\alpha)$. Supponiamo che $K = Mod(\Gamma)$ e supponiamo per assurdo che per ogni sottoinsieme finito Γ' di Γ valga $Mod(\Gamma') \neq K$. Dato che $\Gamma' \subseteq \Gamma$ abbiamo $Mod(\Gamma) \subset Mod(\Gamma')$ e quindi $Mod(\alpha) \subset Mod(\Gamma')$. Allora per ogni sottoinsieme finito Γ' di Γ esiste un modello di $\Gamma' \cup \{\neg\alpha\}$. Quindi ogni sottoinsieme finito di $\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ è soddisfacibile. (Anche il singolo $\neg\alpha$ è soddisfacibile, a meno che α sia una verità logica, il che può accadere solo nel caso banale in cui K sia la classe di tutte le strutture: in questo caso il teorema è banalmente vero.) Per il teorema di compattezza anche

$\Gamma \cup \{\neg\alpha\}$ è soddisfacibile, ma allora in K esiste anche un modello di $\neg\alpha$, il che contraddice $K = Mod(\alpha)$.

4.17 Funzioni di Skolem

Esercizio 4.17.1 Siano $\mathcal{A}^*$ e $\mathcal{B}^*$ strutture per $\mathcal{L}^*$. Si dimostri che:

1. Se $\mathcal{B}^* \models SK$ allora $\mathcal{B}^* \models \alpha \leftrightarrow \alpha^S$, per ogni $\alpha \in \mathcal{L}^S$.
2. Se $\mathcal{B}^* \models SK$ e $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{B}^*$ allora $\mathcal{A}^* \models SK$.

1. L'equivalenza si ottiene sommando i risultati del teorema 4.15.3 (1) e (2).

2. Consideriamo un assioma di Skolem $\sigma = \forall\overline{x}(\exists y\alpha \leftrightarrow \alpha'(y/F_{\exists y\alpha}(\overline{x})))$. Poiché $\mathcal{B}^* \models SK$ abbiamo $\mathcal{B}^* \models \sigma$ e, per il punto precedente, $\mathcal{B}^* \models \sigma \leftrightarrow \sigma^S$. Allora $\mathcal{B}^* \models \sigma^S$ ed essendo σ^S una formula universale da $\mathcal{A}^* \subseteq \mathcal{B}^*$ segue $\mathcal{A}^* \models \sigma^S$. (Infatti, se $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ allora ogni formula universale vera in $\mathcal{B}$ è vera anche in $\mathcal{A}$: ciò deriva dal teorema 4.15.1 (2) perché $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ equivale all'esistenza di un monomorfismo $i_A \mathcal{A} \to \mathcal{B}$.) Poiché $\models \sigma^S \to \sigma$ (per il teorema 4.17.3 (1)) abbiamo $\mathcal{A}^* \models \sigma$ e quindi $\mathcal{A}^* \models SK$.

Esercizio 4.17.2 Si dimostri che $\not\models \alpha \leftrightarrow \alpha^H$.

Sia $\alpha = \forall x P(x)$ e sia $\mathcal{A}$ una struttura tale che, per qualche a, valga $\mathcal{A} \models P(x)[a]$ e nello stesso tempo $\mathcal{A} \not\models \forall x P(x)$. Abbiamo

$$\alpha^H = P(c_{[\neg\forall x P(x)]}) = P(c_{\exists x \neg P(x)}).$$

Interpretiamo $c_{\exists x\neg P(x)}$ in modo che sia $c^{\mathcal{A}}_{\exists x\neg P(x)} = a$. (Ciò è possibile perché non c'è nessun vincolo sull'interpretazione di $c_{\exists x\neg P(x)}$, dato che $\mathcal{A}$ non deve essere modello degli assiomi di Skolem.) Abbiamo allora $\mathcal{A} \models P(c_{\exists x\neg P(x)})$ ossia $\mathcal{A} \models \alpha^H$. Quindi α e α^H non sono equivalenti in ogni struttura.

4.18 Teoremi di Löwenheim-Skolem

Esercizio 4.18.1 Questo esercizio fornisce una costruzione di un insieme di Henkin per $\mathcal{L}$ diversa da quella del paragrafo 4.12, che consente una valutazione più facile della cardinalità del modello utilizzato nella dimostrazione di completezza. Sia Γ un insieme coerente di enunciati di $\mathcal{L}$ e sia C un insieme di costanti nuove tale che $|C| = |\mathcal{L}| = \xi$. Sia $\mathcal{L}' = \mathcal{L} \cup C$, allora anche $|\mathcal{L}'| = \xi$. Sia $\{\alpha_\eta\}_{\eta<\xi}$ una enumerazione delle formule di $\mathcal{L}'$ contenenti esattamente una variabile libera e sia $\{c_\eta\}_{\eta<\xi}$ una enumerazione di C. Definiamo $\varphi : \xi \to \xi$ in modo tale che $c_{\varphi(\eta)}$ non occorra in alcuna α_δ, con $\delta \leq \eta$. Definiamo ora la successione $\{\Gamma_\eta\}_{\eta<\xi}$ come segue:

1. $\Gamma_0 = \Gamma$,

2. se $\eta = \zeta + 1$, $\Gamma_\eta = \Gamma_\zeta \cup \{\exists x_\zeta \alpha_\zeta \to \alpha_\zeta(x_\zeta / c_{\varphi(\zeta)})\}$, dove x_ζ è la variabile libera di α_ζ,

3. se η è un ordinale limite, $\Gamma_\eta = \bigcup\{\Gamma_\zeta\}_{\zeta<\eta}$.

Poniamo $\Gamma_\xi = \bigcup\{\Gamma_\eta\}_{\eta<\xi}$. Si dimostri che: 1) per ogni $\eta < \xi$, Γ_η è coerente, 2) Γ_ξ è coerente, 3) Γ_ξ è di Henkin in $\mathcal{L}'$. Poiché $\mathcal{L}'$ ha cardinalità ξ, la struttura canonica relativa a qualsiasi insieme di formule in $\mathcal{L}'$ avrà cardinalità $\leq \xi$.

1. Dimostriamo che ogni Γ_η è coerente per induzione su ξ. Γ_0 è coerente per ipotesi. Dimostriamo che se Γ_ζ è coerente, allora anche $\Gamma_{\zeta+1}$ lo è. Supponiamo per assurdo che $\Gamma_{\zeta+1}$ sia incoerente, allora

$$\Gamma_\zeta \cup \{\exists x_\zeta \alpha_\zeta \to \alpha_\zeta(x_\zeta / c_{\varphi(\zeta)})\} \vdash \beta \wedge \neg\beta$$

e quindi

$$\Gamma_\zeta \vdash (\exists x_\zeta \alpha_\zeta \to \alpha_\zeta(x_\zeta / c_{\varphi(\zeta)})) \to \beta \wedge \neg\beta$$

da cui

$$\Gamma_\zeta \vdash \neg(\exists x_\zeta \alpha_\zeta \to \alpha_\zeta(x_\zeta / c_{\varphi(\zeta)}))$$

ossia

$$\Gamma_\zeta \vdash \exists x_\zeta \alpha_\zeta \quad \text{e} \quad \Gamma_\zeta \vdash \neg\alpha_\zeta(x_\zeta / c_{\varphi(\zeta)})).$$

Per il teorema 4.11.6 vale $\Gamma_\zeta \vdash \neg\alpha_\zeta$ da cui $\Gamma_\zeta \vdash \forall x_\zeta \neg\alpha_\zeta$ ossia $\Gamma_\zeta \vdash \neg\exists x_\zeta \alpha_\zeta$, ma allora Γ_ζ sarebbe incoerente, contro l'ipotesi induttiva. Dimostriamo infine che, se η è un ordinale limite, $\bigcup\{\Gamma_\zeta\}_{\zeta<\eta}$ è coerente. Infatti se da tale insieme di assiomi si potesse dimostrare una contraddizione, esisterebbe un sottoinsieme finito Γ' di $\bigcup\{\Gamma_\zeta\}_{\zeta<\eta}$ da cui si potrebbe ricavare la medesima contraddizione. (Ciò è evidente per i calcoli hilbertiani, dato che una dimostrazione è una successione finita di formule in cui può occorrere solo un numero finito degli assiomi di $\bigcup\{\Gamma_\zeta\}_{\zeta<\eta}$; nel caso dei calcoli di sequenti utilizziamo il teorema 3.7.11, che si estende immediatamente al calcolo predicativo.) Ma allora esisterebbe un Γ_η da cui si potrebbe ottenere la stessa contraddizione, per il lemma 3.9.4, il che è assurdo.

2. La dimostrazione di coerenza di $\Gamma_\xi = \bigcup\{\Gamma_\eta\}_{\eta<\xi}$ coincide con la dimostrazione di coerenza di Γ_η nel caso dell'ordinale limite.

3. Γ_ξ è di Henkin in $\mathcal{L}'$. Sia $\exists x\alpha$ un enunciato di $\mathcal{L}'$. Se α non contiene x libera, e quindi nessun'altra variabile libera, $\exists x\alpha$ equivale ad α e $\alpha(x/c)$ è α stessa, quindi l'assioma di Henkin che Γ_ξ dovrebbe dimostrare equivale ad $\alpha \to \alpha$. Supponiamo che α contenga libera esattamente x, allora $\alpha = \alpha_\zeta$ per qualche $\zeta < \xi$ e quindi $\Gamma_{\zeta+1}$ dimostra $\exists x_\zeta \alpha_\zeta \to \alpha_\zeta(x_\zeta / c_{\varphi(\zeta)})$.